



UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

SKRIPT ZUR VORLESUNG
LIE-GRUPPEN UND DARSTELLUNGSTHEORIE

gehalten an der
Universität Heidelberg
im
Wintersemester 2015/16
von
Johannes Walcher

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINFÜHRUNG	3
1.1	Darstellungstheorie	3
1.2	Lie-Gruppen	6
2	DARSTELLUNGSTHEORIE ENDLICHER GRUPPEN	9
2.1	Das Lemma von Schur	9
2.2	Vollständige Zerlegbarkeit	11
2.3	Charaktere	12
2.4	Orthogonalitätssätze	14
2.5	Weitere Anwendungen	18
3	DARSTELLUNGSTHEORIE DER SYMMETRISCHEN GRUPPE	21
3.1	Bereitstellung	21
3.2	Die irreduziblen Darstellungen	23
3.3	Die Charaktertafel der symmetrischen Gruppe	29
3.4	Symmetrische Funktionen	32
4	KONTINUIERLICHE UND DIFFERENZIERBARE GRUPPEN	33
4.1	Topologische Gruppen	33
4.2	Von Lie-Gruppen und Lie-Algebren	36
4.3	Beispiele—Die klassischen Gruppen	41
5	VON LIE-ALGEBREN UND LIE-GRUPPEN	49
5.1	Die Exponentialabbildung	51
5.2	Die adjungierte Darstellung	54
5.3	Die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel	56
5.4	Einige globale Aussagen	59
5.5	Nieder-dimensionale Beispiele	62
6	STRUKTURTHEORIE	67
6.1	Definitionen	67
6.2	Sätze von Engel und Lie	71
6.3	Das Cartan-Kriterium	74
6.4	Folgerungen und Ergänzungen	81

7	EINFACHE LIE-ALGEBREN ÜBER \mathbb{C}	93
7.1	Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	93
7.2	Darstellungstheoretische Betrachtungen	96
7.3	Cartan-Unteralgebren und Wurzelräume	101
7.4	Klassifikation von Wurzelsystemen	108
7.5	Satz von Peter-Weyl	113

KAPITEL 1

EINFÜHRUNG

Diese Vorlesung richtet sich an vorrückende Studierende der Mathematik und Physik. Für die darstellungstheoretischen Betrachtungen werden Kenntnisse der linearen Algebra bis zur Jordanschen Normalform von linearen Abbildungen benötigt, die aber für die Zwecke der Strukturtheorie von Lie-Algebren noch einmal wiederholt wird. Lie-Gruppen werden abstrakt eingeführt und ihr Zusammenhang zu Lie-Algebren koordinatenfrei untersucht, so dass gewisse Grundkenntnisse in der Differentialgeometrie, wenn auch keine volle Kursvorlesung, für einen vollen Nutzen von Vorteil sind. Bei diesem Durchlauf wird die Darstellungstheorie kompakter topologischer Gruppen hintangestellt, so dass sich der analytische Anspruch in Grenzen hält. (Ob sich Zeit für unendlich-dimensionale Darstellungen findet, ist noch nicht abzusehen.)

· Für Kommentare, auch Fehlermeldungen, zum Skript, per Email an walcher@uni-heidelberg.de, bin ich sehr dankbar.

· Zur Homepage der Vorlesung: www.mathi.uni-heidelberg.de/~walcher/teaching/wise1516/lie_groups/

§ 1.1 Darstellungstheorie

Definition 1.1. Eine (lineare) *Darstellung* einer Gruppe G ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Homomorphismus

$$\rho : G \rightarrow GL(V) \tag{1.1}$$

in die Gruppe der linearen Automorphismen von V .

Bemerkungen. G wird hier aufgefasst als “abstrakte Gruppe” mit einer multiplikativ geschriebenen Verknüpfung, welche vermöge $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ “konkret” durch Matrixmultiplikation realisiert wird. Als Physiker wertet man umgekehrt.

Lemma 1.2. Sei $e \in G$ das neutrale Element. Dann ist $\rho(e) = \text{id}_V$, die Identität auf V .

Beweis. Für alle $v \in V$ gilt

$$\rho(e)v = \rho(e)\rho(e)\rho(e)^{-1}v = \rho(e^2)\rho(e)^{-1}v = \rho(e)\rho(e)^{-1}v = v \tag{1.2}$$

OEΔ

Bemerkungen. Ohne weitere Angaben werden alle Vektorräume über dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen angenommen. Charakteristik 0, metrische Vollständigkeit

und algebraische Abgeschlossenheit spielen alle eine gewisse Rolle. Wir werden auch Gelegenheit haben, Vektorräume über \mathbb{R} zu betrachten. Weitere Annahmen werden später hinzugefügt.

Beispiel 1.3. $G = \mathbb{Z}/2 = \{e, \sigma\}$, $\sigma^2 = e$. $V = \mathbb{C}$, $GL(V) = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\rho(e) = \text{id}_V = 1$, wie wir gerade gesehen haben. Dann folgt aus der Homomorphismeigenschaft

$$\rho(\sigma)^2 = \rho(e) = 1 \tag{1.3}$$

und daher $\rho(\sigma) = \pm 1$. Wir wollen die entsprechenden Darstellungen (\mathbb{C}, ρ_+) bzw. (\mathbb{C}, ρ_-) nennen. (Häufig lässt man auch entweder den Vektorraum oder den Homomorphismus in der Notation weg, z.B. definiert man $\dim \rho = \dim V$.)

Einige assoziierte Begriffe: Seien (V_1, ρ_1) und (V_2, ρ_2) zwei Darstellungen einer Gruppe G .

· Eine Abbildung (oder G -lineare Abbildung, oder G -Morphismus, etc.) von (V_1, ρ_1) nach (V_2, ρ_2) ist eine lineare Abbildung $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ von Vektorräumen derart dass für all $g \in G$

$$\phi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \phi : V_1 \rightarrow V_2 \tag{1.4}$$

Wir bezeichnen den Vektorraum solcher G -Morphismen mit $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$.

· (V_1, ρ_1) heisst Unterdarstellung von (V_2, ρ_2) falls ein injektiver G -Morphismus $V_1 \hookrightarrow V_2$ existiert. Wir fassen auch V_1 als Untervektorraum von V_2 auf mit $\rho_1 = \rho_2|_{V_1}$, oder $\rho_2(G)(V_1) \subset V_1$. V_1 heisst dann auch invarianter Unterraum.

· (V_1, ρ_1) und (V_2, ρ_2) heissen isomorph (oder äquivalent) falls ein G -Isomorphismus $V_1 \xrightarrow{\cong} V_2$ existiert.

· Die direkte Summe von zwei Darstellungen ist der Vektorraum $V_1 \oplus V_2$ mit dem Homomorphismus

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = \rho_1(g) \oplus \rho_2(g) \tag{1.5}$$

Das Tensorprodukt von Darstellungen ist analog definiert (Wiederholung in den Übungen).

· Für beliebiges V ist die "triviale" Darstellung $\rho(g) = \text{id}_V$ für alle g . "Triviale" G -Morphismen sind hingegen $\phi = \text{id}_V : V \rightarrow V$ oder $\phi : V \rightarrow 0$, wobei der triviale Vektorraum offensichtlich eine Darstellung ist.¹

Definition 1.4. Eine Darstellung (V, ρ) von G heisst *irreduzibel* falls $V \neq 0$ und keine nicht-triviale Unterdarstellung enthält, d.h. die invarianten Unterräume sind genau 0 und ganz V . Andernfalls heisst sie *reduzibel*.

Eine Darstellung heisst *zerlegbar* falls sie äquivalent zu einer nicht-trivialen direkten Summe zweier Darstellungen ist, andernfalls unzerlegbar.

Eine *Irrep* ist eine Isomorphismenklasse irreduzibler Darstellungen.

Beispiel 1.5. $G = \mathbb{Z}/2$:

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}, \rho_-) \otimes (\mathbb{C}, \rho_-) &\cong (\mathbb{C}, \rho_+) \\ (\mathbb{C}, \rho_-) \oplus (\mathbb{C}, \rho_+) &\cong (\mathbb{C}^2, \rho_2), \quad \text{wobei } \rho_2(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.6}$$

¹Die ein-dimensionale triviale Darstellung ist irreduzibel und verhält sich neutral im Tensorprodukt, der triviale Vektorraum analog in der direkten Summe.

1.1. DARSTELLUNGSTHEORIE

(\mathbb{C}, ρ_+) und (\mathbb{C}, ρ_-) sind beide irreduzibel.

Das Ziel der Darstellungstheorie ist die Beschreibung “aller” möglichen Darstellungen einer gegebenen Gruppe, üblicherweise durch Zusammensetzung der irreduziblen.

Beispiel 1.6. $G = S_3$, die symmetrische Gruppe vom Grad 3, ist dargestellt auf \mathbb{C}^3 durch Wahl einer Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ und die Vorschrift

$$\begin{aligned} \rho(\sigma)(b_i) &= b_{\sigma(i)} \\ \left(\text{d.h. } \rho(v)^i &= v^{\sigma^{-1}(i)}, \text{ für } v = \sum_{i=1}^3 v^i b_i \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Diese Darstellung hat einen nicht-trivialen invarianten Unterraum, der von $b_1 + b_2 + b_3$ aufgespannt wird. Der (orthogonal) komplementäre Unterraum (bezüglich des standard inneren Produkts) ist ebenfalls invariant: Er wird aufgespannt von $b_1 - b_2$ und $b_2 - b_3$ und es gilt

$$\begin{aligned} \rho((123))(b_1 - b_2) &= b_2 - b_3 \\ \rho((123))(b_2 - b_3) &= b_3 - b_1 = -(b_1 - b_2) - (b_2 - b_3) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Das heisst in dieser Basis hat die Einschränkung ρ_2 der zyklischen Permutation die Matrix-Darstellung

$$(\rho_2((123))) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Weiterhin gilt beispielsweise

$$(\rho_2((12))) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\rho_2((13))) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Die zwei-dimensionale Darstellung ρ_2 ist irreduzibel und wir erhalten die Zerlegung

$$(\mathbb{C}^3, \rho) \cong (\mathbb{C}^2, \rho_2) \oplus (\mathbb{C}, \rho_+) \quad (1.11)$$

\nwarrow
 triviale Darstellung

der Permutationsdarstellung (1.7) in irreduzible.

Wir werden im Kapitel 2 zeigen, dass jede Darstellung einer endlichen Gruppe sich auf diese Weise in irreduzible Teile zerlegen lässt und beschreiben, wie man prinzipiell diese Irreps erhält. Im Kapitel 3 konkretisieren wir dann diese abstrakte Beschreibung für die symmetrischen Gruppen S_n .

Es gibt noch eine weitere Irrep von S_3 , welche weder zu ρ_+ noch zu ρ_2 isomorph ist, die ein-dimensionale “alternierende” Darstellung:

$$\rho_-(\sigma) = \text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{sonst} \\ -1 & \sigma \text{ eine Transposition} \end{cases} \quad (1.12)$$

§ 1.2 Lie-Gruppen

Nach dem Satz von Peter-Weyl (siehe § 7.5) verhält sich die Darstellungstheorie kompakter topologischer Gruppen im wesentlichen genauso wie die der endlichen Gruppen. Allerdings erfordern die Beweise einige analytische Hilfsmittel (insbesondere die Existenz des Haarschen Maßes), die wir aus Zeitgründen bei diesem Durchgang wohl unterschlagen werden.

Definition 1.7. Eine Lie-Gruppe G ist eine mit einer differenzierbaren Struktur ausgestatte Gruppe, in der die Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind.

Der Beitrag der differenzierbaren Struktur (deren geometrische Grundlagen wir im Kapitel 4 wiederholen) ist, dass sich die Darstellungstheorie der Lie-Gruppen durch “Ableiten am neutralen Element” auf die Darstellungstheorie der Lie-Algebren zurückführen lässt (siehe Kapitel 5). Wir geben zunächst das wichtige

Beispiel 1.8.

$$G = SU(2) = \{g \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}), g^\dagger g (= \bar{g}^T g) = \text{id}, \det g = 1\} \quad (1.13)$$

Fakt: $SU(2) \cong S^3$ (die drei-dimensionale Sphäre):

Bew.: Die definierenden Gleichungen für $g = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ sind

$$\begin{aligned} g^\dagger g = \text{id} &\Rightarrow \begin{cases} |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, & |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1 \\ \bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_2 z_4 = 0 & (i) \end{cases} \\ \det g = 1 &\Rightarrow z_1 z_4 - z_2 z_3 = 1 \quad (ii) \\ z_2(i) + \bar{z}_1(ii) &\Rightarrow |z_1|^2 z_4 + |z_2|^2 z_4 = \bar{z}_1 \\ \Rightarrow z_4 = \bar{z}_1, &\text{ ebenso } z_3 = -\bar{z}_2, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Zusammen

$$SU(2) \cong \{z_1 = x_4 + ix_3, z_2 = x_2 + ix_1; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} = S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2 \quad (1.15)$$

Dies ist eine kompakte, reell drei-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für eine Lie-Gruppe wird unsere Hauptsorge dem Tangentialraum am neutralen Element gelten. Etwas salopp sei $g = \text{id} + \epsilon a$ mit ϵ “infinitesimal” (und reell), $a \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$. Dann sind die definierenden Gleichungen zur Ordnung ϵ

$$\begin{aligned} g^\dagger g - \text{id} &= \epsilon(a^\dagger + a) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \quad \Rightarrow a = -a^\dagger \\ \det g - 1 &= \epsilon \text{tr } a + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \quad \Rightarrow \text{tr } a = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Also ist der Tangentialraum am neutralen Element $e = \text{id} \in SU(2)$ der Vektorraum der spurlosen 2×2 anti-hermiteschen Matrizen,

$$T_e G = \left\{ a = i \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3 \quad (1.17)$$

1.2. LIE-GRUPPEN

Mit der natürlichen Lie-Algebra Struktur versehen (für $a, b \in T_e G$ ist auch der Kommutator $[a, b] \in T_e G$) bezeichnen wir diesen Vektorraum mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$. Ein großer Teil der Struktur- und Darstellungstheorie der halb-einfachen Lie-Gruppen lässt sich aus der von $\mathfrak{su}(2)$ konstruieren.

· Für jetzt sei noch neben der trivialen und der definierenden Darstellung

$$\rho_2 : SU(2) \hookrightarrow GL(2, \mathbb{C}) \quad (1.18)$$

die folgende interessante, 3-dimensionale sog. adjungierte Darstellung auf der Lie-Algebra erwähnt:

$$\rho_3 : SU(2) \rightarrow GL(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), \quad \rho_3(g)a = gag^\dagger \quad (1.19)$$

(Wegen Linearität und $\text{tr}(gag^\dagger) = \text{tr}(g^\dagger ga) = \text{tr} a$ ist dies eine Darstellung.) ρ_3 ist eine reelle Darstellung (d.h. ihr Bild ist in $GL(\mathfrak{g})$) und da wegen

$$\det a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ und } \det gag^\dagger = \det a \quad (1.20)$$

ρ_3 das standard innere Produkt auf $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{g}$ erhält, liefert ρ_3 einen Homomorphismus $SU(2) \rightarrow SO(3)$. (Genauer gesagt erhält man zunächst $\rho_3(SU(2)) \subset O(3)$, aber wegen der Stetigkeit muss das Bild zusammenhängend sein.) Man prüfe nach:

· ρ_3 ist surjektiv.

· ρ_3 ist nicht injektiv, und $\text{Ker}(\rho_3) = \{\pm \text{id}\}$.

Wir erhalten die exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow SU(2) \rightarrow SO(3) \quad (1.21)$$

oder auch die geometrische Aussage, dass $SO(3) \cong S^3/\mathbb{Z}/2 = \mathbb{RP}^3$.

KAPITEL 2

DARSTELLUNGSTHEORIE ENDLICHER GRUPPEN

Zunächst noch eine weitere (zusätzlich zu direkter Summe etc.) Operation auf Darstellungen: Falls $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer Gruppe ist, so trägt der Dualraum $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ in natürlicher Weise die duale Darstellung, welche definiert wird durch

$$\rho^* : G \rightarrow GL(V^*), \quad \rho^*(g) = (\rho(g^{-1}))^* \leftarrow \text{duale lineare Abbildung} \quad (2.1)$$

Dies heisst im Klartext:

$$(\rho^*(g)(\lambda))(v) = (\rho(g^{-1})^*(\lambda))(v) = \lambda(\rho(g^{-1})v) \quad (2.2)$$

Man kann auch sagen, die Paarung $V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{C}, (\lambda, v) \mapsto \lambda(v)$ ist invariant unter der Darstellung $\rho^* \otimes \rho$ auf $V^* \otimes V$. Beachte, dass das Inverse nötig ist, um in Kombination mit dem Dualen überhaupt eine Darstellung zu ergeben:

$$\rho^*(g_1 g_2) = \rho(g_2^{-1} g_1^{-1})^* = \rho(g_1^{-1})^* \rho(g_2^{-1})^* = \rho^*(g_1) \rho^*(g_2) \quad (2.3)$$

Identifiziert man (für endlich-dimensionale Darstellungen und nach Wahl einer Basis) lineare Abbildungen mit Matrizen, so gilt

$$\rho^*(g) = \rho(g)^{-T} \leftarrow \text{invers-transponierte Matrix} \quad (2.4)$$

· Für *unitäre Darstellungen* (mehr sogleich) gilt $\rho^*(g) = \overline{\rho(g)}$ (komplexe Konjugation von Matrizen). Daher identifizieren Physiker für gewöhnlich duale und konjugierte Darstellung. In dieser Vorlesung wollen wir aber etwas vorsichtiger sein und die mögliche Wahl einer invarianten positiv definiten Hermiteschen Sesquilinearform erst entdecken.

Im Folgenden stellen wir uns vor allem endlich-dimensionale Darstellungen vor, auch wenn die meisten Betrachtungen zunächst allgemeiner gelten. Für endliche Gruppen begründen wir diese Einschränkung auf endliche Dimension am Anfang von § 2.3.

§ 2.1 Das Lemma von Schur

Lemma 2.1 (Lemma von Schur). *Seien (V_1, ρ_1) und (V_2, ρ_2) Darstellungen von G , und $\phi \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$ ein G -Morphismus.*

- (i) $\text{Ker}(\phi)$ ist eine Unterdarstellung von ρ_1 und $\text{Im}(\phi)$ ist eine Unterdarstellung von ρ_2 . Ausserdem induziert ρ_2 eine Darstellung auf $\text{Coker}(\phi) = V_2 / \text{Im}(\phi)$.
(ii) Falls (V_1, ρ_1) und (V_2, ρ_2) irreduzibel sind, so ist ϕ invertierbar oder 0.
(iii) Sei $\phi' \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$ eine weitere solche G -lineare Abbildung. Falls $(V_{1,2}, \rho_{1,2})$ irreduzibel sind, und V_1 endlich-dimensional, sowie $\phi \neq 0$, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ so dass $\phi' = \alpha\phi$.

Beweis. (i) ist trivial. Z.B. impliziert $\phi(v) = 0$ sofort $\phi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)\phi(v) = 0$, d.h. $v \in \text{Ker}(\phi) \Rightarrow \rho_1(g)v \in \text{Ker}(\phi) \forall g \in G$.

(ii) Falls $\phi \neq 0$, so ist $\text{Ker} \phi \neq V_1$. Da $\text{Ker}(\phi)$ G -invariant ist und V_1 irreduzibel, muss $\text{Ker}(\phi) = 0$ sein. Also ist ϕ injektiv. In ähnlicher Weise ist im Falle $\phi \neq 0$ $\text{Im}(\phi) \neq 0$, und da V_2 irreduzibel ist, folgt $\text{Im}(\phi) = V_2$. Damit ist ϕ surjektiv, mithin invertierbar.

(iii) Die G -lineare Abbildung $\phi^{-1}\phi' : V_1 \rightarrow V_1$ hat über dem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{C} einen Eigenwert α , d.h. die G -lineare Abbildung $\phi^{-1}\phi' - \alpha \text{id}_{V_1}$ ist nicht invertierbar, und muss daher nach Aussage (ii) identisch verschwinden. Daraus folgt sofort $\phi' = \alpha\phi$. OEΔ

Bemerkungen. Für endlich-dimensionale irreduzible Darstellungen schreibt man Aussage (iii) auch als

$$\text{Hom}_G(V_1, V_2) = (V_2 \otimes V_1^*)^G = \begin{cases} 0 & V_1 \not\cong V_2 \\ \mathbb{C} & V_1 \cong V_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

Theorem 2.2. Sei G abelsch und (V, ρ) eine endlich-dimensionale irreduzible Darstellung von G . Dann ist V ein-dimensional, d.h. $\rho \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$.

Beweis. Wir behaupten, dass für jedes $g_0 \in G$, $\rho(g_0) = \alpha(g_0) \text{id}_V$ für $\alpha(g_0) \in \mathbb{C}^\times$. Tatsächlich gilt ja für jedes $g \in G$

$$\rho(g_0)\rho(g) = \rho(g_0g) = (G \text{ abelsch}) = \rho(gg_0) = \rho(g)\rho(g_0) \quad (2.6)$$

d.h. $\rho(g_0) \in \text{Hom}_G(V, V)$. Mit dem Lemma von Schur folgt $\rho(g_0) = \alpha(g_0) \text{id}_V$. Dann aber ist jeder Unterraum von V invariant. Also muss V ein-dimensional sein. OEΔ

Bemerkungen. Die algebraische Abgeschlossenheit von \mathbb{C} ist hier wichtig. Z.B. hat $G = SO(2) = U(1) = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \ni \theta$ die reelle Darstellung

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2, \mathbb{R}) \subset GL(2, \mathbb{R}) \quad (2.7)$$

Diese Darstellung ist irreduzibel, und der Raum der invarianten Endomorphismen ist zwei-dimensional, aufgespannt von

$$\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2.2. VOLLSTÄNDIGE ZERLEGBARKEIT

§ 2.2 Vollständige Zerlegbarkeit

Definition 2.3. Eine Darstellung (V, ρ) von G heisst *unitär*, falls ein G -invariantes hermitesches inneres Produkt existiert, d.h. eine quadratische Form

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \langle \lambda v + \mu w, u \rangle &= \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \bar{\mu} \langle w, u \rangle \\ \langle v, w \rangle &= \overline{\langle w, v \rangle}, \quad \langle v, v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0 \\ \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle &= \langle v, w \rangle \quad \forall g \in G \end{aligned} \tag{2.9}$$

Beachte: Falls solch ein inneres Produkt V (halb-linear!) mit dem Dualraum V^* identifiziert (vermöge $v \mapsto v^\flat := \langle v, \cdot \rangle$), so erhält man dadurch auch eine Identifikation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}\text{om}(V^*, V) & \cong & \text{Hom}(V, V) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{halb-lineare} & & \text{lineare Abbildungen} \end{array} \tag{2.10}$$

Falls V irreduzibel ist, folgt aus dem Lemma von Schur, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathbb{H}\text{om}_G(V \otimes V, \mathbb{C})$ bis auf einen skalaren Faktor eindeutig ist. Unitarität bedeutet natürlich noch *nicht*, dass $V \cong V^*$ als Darstellung von G im Sinne der Eingangsbemerkung (2.1) zu diesem Kapitel.

Proposition 2.4. *Sei jetzt G eine endliche Gruppe und (V, ρ) eine Darstellung. Dann ist (V, ρ) unitär.*

Beweis. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges (nicht notwendigerweise G -invariant) hermitesches inneres Produkt. Dann ist

$$\langle v, w \rangle := \sum_{h \in G} \langle \rho(h)v, \rho(h)w \rangle \tag{2.11}$$

ein invariantes inneres Produkt:

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \sum_{h \in G} \langle \rho(hg)v, \rho(hg)w \rangle = \sum_{hg=h' \in G} \langle \rho(h')v, \rho(h')w \rangle = \langle v, w \rangle \tag{2.12}$$

und die anderen Eigenschaften sind klar. (Allerdings ist es wichtig, ein positiv definites inneres Produkt zu verwenden. Ein nur nicht-entartetes inneres Produkt gemischter Signatur kann beim Mitteln über die Gruppe entarten.) **OEΔ**

Proposition 2.5 (Satz von Maschke). *Sei (V, ρ) eine unitäre Darstellung von G , und $U \subset V$ eine Unterdarstellung. Dann existiert eine weitere Unterdarstellung $W \subset V$ sodass*

$$V = U \oplus W \tag{2.13}$$

Beweis. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein invariantes hermitesches inneres Produkt. Setze $W = U^\perp$ (das orthogonale Komplement). Falls $w \in U^\perp$, so ist $\forall u \in U$,

$$\langle \rho(g)w, u \rangle = \langle w, \rho(g)^{-1}u \rangle = 0 \tag{2.14}$$

also $\rho(g)w \in U^\perp$. Dies bedeutet, dass U^\perp auch G -invariant ist. **OEΔ**

Korollar 2.6 (Vollständige Zerlegbarkeit). *Sei V eine endlich-dimensionale Darstellung einer endlichen Gruppe G . Dann existieren (paarweise nicht-isomorphe) irreduzible Darstellungen V_1, \dots, V_k und Multiplizitäten $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ so dass*

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^k V_i \otimes \mathbb{C}^{a_i} = \bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus a_i} \quad (2.15)$$

und diese Zerlegung ist bis auf Reihenfolge und Isomorphismus eindeutig.

Beweis. Die Existenz folgt durch wiederholtes Anwenden aus dem Satz von Maschke. Für die Eindeutigkeit sei

$$V = \bigoplus_{j=1}^l W_j \otimes \mathbb{C}^{b_j} \quad (2.16)$$

eine weitere solche Zerlegung. Da $\text{id}_V|_{V_i} \rightarrow V$ ein G -Morphismus ist, muss nach dem Lemma von Schur das Bild eine irreduzible Darstellung isomorph zu V_i sein. Wiederhole. OEΔ

Beachte, dass falls G nicht endlich ist (und auch nicht kompakt), vollständige Zerlegbarkeit verloren geht. Betrachte z.B.

$$(\mathbb{R}, +) \ni a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \quad (2.17)$$

§ 2.3 Charaktere

Als ersten Schritt auf dem Weg zu unserem Ziel, alle irreduzible Darstellungen endlicher Gruppen zu beschreiben, halten wir fest:

Lemma 2.7. *Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine nicht-triviale Darstellung einer endlichen Gruppe G . Dann existiert in V ein endlich-dimensionaler invarianter Unterraum (eine endlich-dimensionale Unterdarstellung). Insbesondere ist jede irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe endlich-dimensional.*

Beweis. Ist einfach, aber höchst instruktiv: Sei $v \in V$, $v \neq 0$. Dann ist $v \cdot \mathbb{C} \subset V$ ein ein-dimensionaler Unterraum, dessen “ G -Orbit”,

$$\begin{aligned} \rho(G)(v \cdot \mathbb{C}) &:= \sum_{g \in G} (\rho(g)v) \cdot \mathbb{C} && \text{keine direkte Summe!} \\ &= \langle \rho(g)v, g \in G \rangle_{\mathbb{C}} && \text{(endlich erzeugter Unterraum)} \end{aligned}$$

ein endlich-dimensionaler invarianter Unterraum von V ist. OEΔ

Das Auftreten “ G -indizierter formaler Linearkombinationen” kann nun in natürlicher Weise die Einführung der folgenden universellen Darstellung von G motivieren.

2.3. CHARAKTERE

Definition 2.8. Sei G eine endliche Gruppe. Die *Gruppenalgebra* von G , Notation $\mathbb{C}G$, ist der Vektorraum der Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, ausgestattet mit dem Konvolutionsprodukt:

$$(f * f')(g) = \sum_{h \in G} f(h)f'(h^{-1}g) = \sum_{h \in G} f(gh^{-1})f'(h) \quad (2.18)$$

Äquivalent dazu ist $\mathbb{C}G$ der Vektorraum der formalen Linearkombinationen von Elementen von G

$$f = \sum_{g \in G} f(g)g \quad (2.19)$$

mit von G ererbtem Produkt:

$$\begin{aligned} f \cdot f' &= \sum_{h, h'} f(h)f'(h')hh' && (hh' = g) \\ &= \sum_{h, g} f(h)f'(h^{-1}g)g = \sum_g (f * f')(g)g \end{aligned} \quad (2.20)$$

Beobachtung: $\cdot \mathbb{C}G$ ist in natürlicher Weise mit zwei Darstellungen von G ausgestattet, welche links- und rechts-reguläre Darstellung genannt werden:

$$\begin{aligned} L(g)f &= g \cdot f = \sum_{h \in G} f(h)gh = \sum_h f(g^{-1}h)h \\ R(g)f &= f \cdot g^{-1} = \sum_h f(hg)h \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$(R(g_1g_2)f = fg_2^{-1}g_1^{-1} = R(g_1)(fg_2^{-1}) = R(g_1)R(g_2)f)$$

· Modulo Psychologie vereinbaren wir, dass $\mathbb{C}G$ die Gruppenalgebra mit der links-regulären Darstellung ist.

Man kann an dieser Stelle zeigen, dass sich jede irreduzible Darstellung von G als Unterdarstellung in $\mathbb{C}G$ einbetten lässt. (Idee: Betrachte für $v \in V$, $\lambda \in V^*$ die "Darstellungsfunktion" $f_{\lambda, v} \in \mathbb{C}G$: $G \ni g \mapsto f_{\lambda, v}(g) := \lambda(\rho(g)v)$. Für festes $\lambda \neq 0$ ist $V \ni v \mapsto f_{\lambda, v} \in \mathbb{C}G$ ein nicht-trivialer G -Morphismus. Mist, falsche Chiralität.)

Für uns folgt dies auch als Korollar aus dem Hauptergebnis dieses Kapitels:

Theorem 2.9 (Zerlegung der regulären Darstellung). *Eine endliche Gruppe hat endlich viele Isomorphismenklassen von irreduziblen Darstellungen V_1, \dots, V_k (die Irreps), welche alle in der Zerlegung der links-regulären Darstellung auftreten. Es gilt:*

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^k V_i \otimes \mathbb{C}^{\dim V_i} \quad (2.22)$$

Zur Ausreduktion von $\mathbb{C}G$ und anderer Darstellungen benutzt man Charaktere und zugehörige Projektionen.

Definition 2.10. Sei (V, ρ) eine endlich-dimensionale Darstellung von G . Der Charakter $\chi_{(V, \rho)}$ (auch χ_V oder χ_ρ geschrieben) ist die komplex-wertige Funktion

$$\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad \chi_V(g) := \text{tr}_V \rho(g) \quad (2.23)$$

Die Idee ist, dass der Charakter die *invariante* Information über die Darstellung kodiert, insbesondere die Eigenwerte der $\rho(g)$ bis auf Permutation: So gibt $\text{tr } \rho(g)$ die Summe der Eigenwerte, $\text{tr } \rho(g^2)$ die Summe der (Eigenwerte)², usw. Formal gesehen gilt:

Lemma 2.11. χ_V ist eine Klassenfunktion, d.h. konstant auf Konjugationsklassen in G : $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g) \forall g, h \in G$. (Wir schreiben dann auch $\chi_V(C)$ für eine Konjugationsklasse $C \subset G$.)

Beweis. Zyklische Invarianz der Spur:
 $\text{tr } \rho(hgh^{-1}) = \text{tr } \rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1} = \text{tr } \rho(g)\rho(h)^{-1}\rho(h) = \text{tr } \rho(g)$ OEΔ

Lemma 2.12 (Eigenschaften von Charakteren). Seien V_1 und V_2 endlich-dimensionale Darstellungen von G . Dann gilt:

- (i) $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$
 - (ii) $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \chi_{V_2}$
 - (iii) $\chi_{V_1^*} = \overline{\chi_{V_1}}$ (komplexe Konjugation)
 - (iv) Falls $V_1 \cong V_2$ dann ist $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$
- (punktweise Summe und Produkt von Funktionen)

Beweis. Die einzig nicht-triviale Aussage ist (iii). Sie folgt z.B. aus der Tatsache, dass alle $g \in G$ endliche Ordnung haben, und daher die Eigenwerte von $\rho(g)$ Einheitswurzeln sind, also auf dem Einheitskreis in \mathbb{C} liegen, wo komplexe Konjugation und Inversion das Gleiche ist. OEΔ

Beispiel 2.13. Wir schreiben die Werte von Charakteren gerne in Tafeln, wie zum Beispiel für S_3 (vgl. (1.9), (1.10), (1.12))

		Konj.Kl.			
		1	(12)	(123)	
Ir-	ρ_+	1	1	1	(2.24)
-re-	ρ_-	1	-1	1	
-ps	ρ_2	2	0	1	

§ 2.4 Orthogonalitätssätze

Theorem 2.14 (Erster Orthogonalitätssatz). Seien V_1 und V_2 irreduzible Darstellungen der endlichen Gruppe G . Dann gilt

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \chi_2(g) = \begin{cases} 1 & \text{falls } V_1 \cong V_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.25)$$

(Die linke Seite von (2.25) ist auch $\sum_{\text{Konj.Kl. } C} \frac{|C|}{|G|} \overline{\chi_1(C)} \chi_2(C)$) (2.26)

Zunächst

2.4. ORTHOGONALITÄTSSÄTZE

Proposition 2.15. *Sei W eine Darstellung von G . Dann ist $\pi : W \rightarrow W$,*

$$\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \quad (2.27)$$

die Projektion auf den G -invarianten Unterraum

$$W^G = \{w \in W, \rho(g)w = w \ \forall g \in G\} \quad (2.28)$$

Beweis. Beh.: $\pi(W) \subset W^G$.

Bew: Sei $\pi(w) \in \pi(W)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho(h)\pi(w) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg)w \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)w \\ &= \pi(w) \quad \Rightarrow \pi(w) \in W^G \end{aligned} \quad (2.29)$$

Beh.: $W^G \subset \pi(W)$

Bew: Sei $w \in W^G$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)w = \pi(w) \quad \Rightarrow w \in \pi(W) \quad (2.30)$$

$\pi^2 = \pi$ folgt durch direktes Nachrechnen.

OEΔ

Beweis von Satz 2.14. Wir wenden die Proposition auf die Darstellung $V_1^* \otimes V_2$ an. Das Lemma von Schur in der Form (2.5) besagt

$$(V_1^* \otimes V_2)^G = \text{Hom}_G(V_1, V_2) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{falls } V_1 \cong V_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.31)$$

Also ist

$$\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_1^*(g) \otimes \rho_2(g) \quad (2.32)$$

0 falls $V_1 \not\cong V_2$ und eine Rang 1 Projektion falls $V_1 \cong V_2$. Spurbildung ergibt genau (2.25). **OEΔ**

Korollar 2.16. *Falls (V, ρ) irgendeine endlich-dimensionale Darstellung von G ist und (V_1, ρ_1) eine irreduzible Darstellung, dann ist die Multiplizität a_1 von V_1 in der Zerlegung (2.15) von $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots$ in irreduzible gegeben durch*

$$a_1 = (\chi_1, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \chi(g) \quad (2.33)$$

(Falls diese Formel 0 ergibt, so kommt V_1 in der Zerlegung von V nicht vor.)

Da die (irreduziblen) Charaktere Klassenfunktionen sind, gilt

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\chi_1}(g) \chi_2(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\text{Konj.Kl. } C} |C| \overline{\chi_1}(C) \chi_2(C) \quad (2.34)$$

Dies ist fast das standard innere Produkt auf dem Vektorraum der Klassenfunktionen. Eine Folgerung aus dem ersten Orthogonalitätssatz Theorem 2.14 ist daher, dass es nicht mehr Isomorphismenklassen von irreduziblen Darstellungen geben kann als Klassenfunktionen (und damit als Konjugationsklassen). Wir zeigen gleich, dass diese Zahlen sogar gleich sind. Zunächst aber beweisen wir die angekündigte Zerlegung der linksregulären Darstellung, Theorem 2.9.

Da wir gerade festgestellt haben, dass es nur endliche viele Irreps V_1, \dots, V_k gibt (mit $k \leq \#\{C\}$), bleibt nur noch zu zeigen, dass jede mit der Multiplizität a_i gleich der Dimension $\dim V_i$ vorkommt. Dazu verwenden wir die Formel (2.33):

$$a_i = (\chi_i, \chi_L) = \frac{1}{|G|} \sum \overline{\chi_i}(g) \chi_L(g) \quad (2.35)$$

Nun gilt aber, dass die Matrixdarstellung der links-regulären Darstellung L mit $\{h \in G\}$ als Basis keine Einträge auf der Diagonalen hat, ausser für $g = e$. Also ist

$$\chi_L(g) = \begin{cases} 0 & \text{falls } g \neq e \\ |G| & \text{falls } g = e \end{cases} \quad (2.36)$$

Mit $\chi_i(e) = \dim V_i$ folgt die Behauptung.

Korollar 2.17.

$$|G| = \sum_{i=1}^k (\dim V_i)^2 \quad (2.37)$$

wo die Summe über alle Irreps läuft.

Zum Schluss beweisen wir noch die bereits gefallenen Aussage, dass die Anzahl Irreps gleich der Anzahl Konjugationsklassen in der Gruppe ist, d.h. nicht nur unterscheiden Konjugationsklassen mittels der Charaktere die Irreps, sondern die Irreps unterscheiden auch die Konjugationsklassen. Die Aussage ist äquivalent dazu, dass der Vektorraum der Klassenfunktionen von den irreduziblen Charakteren aufgespannt wird:

Theorem 2.18. Sei $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Klassenfunktion, d.h. $\alpha(hgh^{-1}) = \alpha(g) \forall g, h \in G$. Falls

$$(\alpha, \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\alpha}(g) \chi_i(g) = 0 \quad (2.38)$$

für alle Irreps ρ_i , dann ist $\alpha = 0$.

Beweis. Für jede Irrep (V_i, ρ_i) gilt:

$$\phi_{\alpha,i} := \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\alpha}(g) \rho_i(g) : V_i \rightarrow V_i \quad (2.39)$$

2.4. ORTHOGONALITÄTSSÄTZE

(die "Projektion auf die zu α gehörende Darstellung") ist ein G -Morphismus:

$$\phi_{\alpha,i}\rho_i(h) = \sum_g \bar{\alpha}(g)\rho_i(gh) \quad (2.40)$$

$$= \sum_g \bar{\alpha}(gh^{-1})\rho_i(g) \quad (2.41)$$

$$= \sum_g \bar{\alpha}(hgh^{-1})\rho_i(hg) \quad (2.42)$$

$$= \rho_i(h)\phi_{\alpha,i} \quad (2.43)$$

Aus dem Lemma von Schur folgt dann, dass $\phi_{\alpha,i} = x \cdot \text{id}_{V_i}$, und wir können den Proportionalitätsfaktor x durch Bilden der Spur ermitteln. Wir finden:

$$\phi_{\alpha,i} = \text{id}_{V_i} \cdot \frac{(\alpha, \chi_i)}{\dim V_i} = 0 \quad (2.44)$$

Falls nun (V, ρ) irgendeine Darstellung ist, so folgt durch Zerlegen in Irreps, dass

$$\phi_{\alpha,V} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\alpha}(g)\rho(g) = 0 \quad (2.45)$$

Insbesondere gilt für die linksreguläre Darstellung

$$\phi_{\alpha,L} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\alpha}(g)g = 0 \quad \text{in } \mathbb{C}G \quad (2.46)$$

Da aber $\{g \in G\}$ eine Basis von $\mathbb{C}G$ ist, folgt $\alpha = 0$. **OEΔ**

Ist dann α irgendeine Klassenfunktion, so folgt leicht $\alpha - \sum_i (\chi_i, \alpha)\chi_i = 0$, d.h. der Raum der Klassenfunktionen wird von den χ_i aufgespannt.

Mit anderen Worten kann man die Gleichung

$$\sum_C \frac{|C|}{|G|} \bar{\chi}_i(C)\chi_j(C) = \delta_{ij} \quad (2.47)$$

$(i, j = 1, \dots, k)$ als die Aussage auffassen, dass die (nun quadratische) Matrix

$$\left(\sqrt{\frac{|C|}{|G|}} \chi_i(C) \right)_{\substack{i=1, \dots, k \\ C \in \{\text{Konj. Kl.}\}}} \quad (2.48)$$

unitär ist. Die Folgerung

$$\sum_i \bar{\chi}_i(C)\chi_i(C') = \begin{cases} \frac{|G|}{|C|} & \text{falls } C = C' \\ 0 & \text{falls } C \neq C' \end{cases} \quad (2.49)$$

wird manchmal (oder wurde früher?) auch als der zweite Orthogonalitätssatz bezeichnet.

§ 2.5 Weitere Anwendungen

2.5.1 Allgemeine Projektionsformel

Theorem 2.19. *Seien V eine endlich-dimensionale Darstellung von G , und V_1 eine Irrep. Dann ist*

$$\psi_{1,V} := \dim V_1 \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1}(g) \rho(g) : V \rightarrow V \quad (2.50)$$

die Projektion auf die “ V_1 -isotypische Komponente von V ”, d.h. auf den Unterraum $V_1^{\oplus a_1} \subset V$, wo a_1 die Multiplizität von V_1 in V ist (oder 0).

Beweis. · Da $\psi_{1,V}$ ein G -Morphismus ist (vgl. Beweis von Theorem 2.18), können wir aufgrund des Lemmas von Schur bezüglich der Zerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V_i \otimes \mathbb{C}^{a_i} \quad (2.51)$$

$\psi_{1,V}$ schreiben als direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^k \psi_{1,V_i}$, und jedes ψ_{1,V_i} auffassen als $\mathbb{C}^{a_i} \rightarrow \mathbb{C}^{a_i}$. · Vorausgesetzt, dass $\psi_{1,V}$ eine Projektion ist (was wir gleich verifizieren), können wir den Rang von ψ_{1,V_i} durch Spurbildung berechnen:

$$\text{Rang}(\psi_{1,V_i}) = \frac{\dim V_1}{|G|} \sum_g \overline{\chi_1}(g) \chi_i(g) a_i \quad (2.52)$$

· Aus der Orthogonalität der Charaktere (Theorem 2.14) folgt dann die Behauptung (dass nämlich $\psi_{1,V_i} = 0$ ist falls $i \neq 1$ und die Identität falls $i = 1$), falls wir noch $\psi_{1,V}^2 = \psi_{1,V}$ zeigen:

$$\begin{aligned} \psi_{1,V}^2 &= \frac{(\dim V_1)^2}{|G|^2} \sum_{g,h} \overline{\chi_1}(g) \overline{\chi_1}(h) \rho(gh) \\ &= \frac{\dim V_1}{|G|} \sum_g \underbrace{\left(\sum_h \frac{\dim V_1}{|G|} \overline{\chi_1}(gh^{-1}) \overline{\chi_1}(h) \right)}_{\text{Beh: dies ist gleich } \overline{\chi_1}(g)} \rho(g) \end{aligned} \quad (2.53)$$

In der Tat gilt ja in V_1 wegen Schur:

$$\frac{1}{|G|} \sum_h \overline{\chi_1}(h) \rho_1(h) = \lambda \cdot \text{id}_{V_1} \quad (2.54)$$

wobei $\lambda = \frac{1}{\dim V_1}$ wieder aus der Spurbildung folgt. Also ist

$$\frac{\dim V_1}{|G|} \sum_h \overline{\chi_1}(h) \rho_1(hg^{-1}) = \rho_1(g^{-1}) \quad (2.55)$$

Spurbildung und $\chi_1(g^{-1}) = \overline{\chi_1}(g)$ ergibt die Behauptung.

OEΔ

2.5. WEITERE ANWENDUNGEN

2.5.2 Induzierte Darstellungen und Frobenius Reziprozität

Wir haben bereits am Anfang (Tensor-)Operationen auf Darstellungen einer gegebenen Gruppe kennengelernt. Im Zuge der Charaktertheorie haben wir gesehen, dass es interessant ist, die Darstellung festzuhalten, und ein algebraisches Objekt (die Konjugationsklasse) zu variieren. Die folgende Variante dieser Idee (nämlich die Variation der Gruppe) tritt in vielen Anwendungen mehr oder weniger explizit auf.

· Sei G eine endliche Gruppe und (V, ρ) eine Darstellung von G . Falls nun $H \subset G$ eine Untergruppe von G ist, so erhalten wir durch Einschränkung von $\rho : G \rightarrow GL(V)$ auf H eine Darstellung von H (ebenfalls auf V), welche natürlich die eingeschränkte Darstellung heisst.

$$\text{Notation: } \text{Res}_H^G V = (V, \rho|_H) \quad (2.56)$$

· Offensichtlich ist $\text{Res}_H^G V$ nicht notwendigerweise irreduzibel, selbst wenn V dies gewesen sein sollte. (Betrachte z.B. $H = \{e\}$.)

· Etwas weniger offensichtlich ist, dass wir in der Situation $H \subset G$ auch in natürlicher Weise aus einer Darstellung (W, σ) von H eine Darstellung von G "induzieren" können.

Wir wählen dazu ein vollständiges System $R \ni r$ von Repräsentanten der Nebenklassen G/H , d.h. wir schreiben

$$G/H = \bigcup_{r \in R} rH \quad (2.57)$$

(Beachte, dass diese Schreibweise R nicht eindeutig festlegt, bei Sorge muss man gegebenenfalls die Unabhängigkeit von der Wahl verifizieren. Jedenfalls ist es vernünftig, H durch $e \in R$ vertreten zu lassen.)

· Nach Definition der Nebenklassen können wir dann für jedes $g \in G$, $r \in R$ in eindeutiger Weise $r^{(g)} \in R$ und $h^{(r,g)} \in H$ finden, sodass gilt¹

$$gr = r^{(g)}h^{(r,g)}, \quad r^{(g)} \in R, h^{(r,g)} \in H \quad (2.58)$$

· Sei nun (W, σ) eine Darstellung von H . Wir führen zunächst $|G/H| = |R|$ isomorphe Kopien von W ein, die wir durch $r \in R$ indizieren (noch $W_e = W$ schreibend) und definieren den Vektorraum, auf dem die *induzierte Darstellung* operieren soll, durch

$$\text{Ind}_H^G W := \bigoplus_{r \in R} W_r \quad (2.59)$$

Die Wirkung ρ von G auf diesem Raum erklären wir schrittweise.

· Zunächst einmal erledigen wir die Darstellung von H auf $W = W_e$ durch die gegebene Darstellung von σ : $\rho(h)w = \sigma(h)w$, $h \in H$, $w \in W$.

· Sodann identifizieren wir für $r \in R$

$$\rho(r) : W = W_e \rightarrow W_r \quad (2.60)$$

als den gegebenen Isomorphismus $W \cong W_r$, den wir noch durch Anschreiben eines Index abkürzen können:

$$\rho(r)w = w_r \quad (2.61)$$

¹Beachte, dass für $h \in H$ nicht notwendigerweise $r^{(h)} = r$ gilt, ausser H ist eine normale Untergruppe.

· Nach diesen beiden (natürlichen) Wahlen liegt der Rest der Darstellung durch die Homomorphismeigenschaften bereits vollständig fest: Für $g \in G$, $w_r \in W_r \subset \text{Ind}_H^G W$ muss gelten (vgl. (2.58)):

$$\begin{aligned} \rho(g)w_r &= \rho(g)\rho(r)w \\ &= \rho(gr)w = \rho(r^{(g)})\rho(h^{(r,g)})w \\ &= \rho(r^{(g)})\sigma(h^{(r,g)})w \\ &= (\sigma(h^{(r,g)})w)_{r^{(g)}} \end{aligned} \tag{2.62}$$

· Es bleibt dann noch zu prüfen, dass dies ein Homomorphismus $\rho : G \rightarrow GL(\text{Ind}_H^G W)$ ist, was wir aber als Übung lassen.

· Ein Ausdruck der *Frobenius-Reziprozität* ist die Aussage, dass falls V eine Darstellung von G ist, und W eine Darstellung von H , dann gilt:

$$\text{Hom}_H(W, \text{Res}_H^G V) \cong \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G W, V) \tag{2.63}$$

Beweisskizze: · Für $\phi \in \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G W, V)$ erhalten wir natürlich ein Element von $\text{Hom}_H(W, \text{Res}_H^G V)$ durch Einschränken von ϕ auf $W = W_e \subset \bigoplus_{r \in R} W_r = \text{Ind}_H^G W$

· Sei umgekehrt $\psi \in \text{Hom}_H(W, \text{Res}_H^G V)$. Zur Verträglichkeit mit der G -Wirkung müssen wir für die Fortsetzung $\tilde{\psi}$ nach $\text{Ind}_H^G W \ni w_r$ setzen:

$$\tilde{\psi}(w_r) = \rho(r)\psi(w) \tag{2.64}$$

(wobei hier ρ die Darstellung von G auf V ist) und damit liegt bereits alles fest.

· Eine andere Ausdrucksweise ist die Formel

$$(\chi_W, \chi_{\text{Res } V})_H = (\chi_{\text{Ind } W}, \chi_V)_G \tag{2.65}$$

für die inneren Produkte der Charakteren, die man nach Rückführung auf irreduzible W und V sofort aus der obigen Identifikation (2.63) (zusammen mit (2.33)) erhält.

· Noch eine Übung ist die interessante Formel

$$\chi_{\text{Ind } W}(g) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}gr \in H}} \chi_W(r^{-1}gr) \tag{2.66}$$

KAPITEL 3

DARSTELLUNGSTHEORIE DER SYMMETRISCHEN GRUPPE

Die allgemeine Darstellungstheorie aus dem letzten Kapitel soll nun am Beispiel der symmetrischen Gruppe in die Praxis umgesetzt werden. Dabei ist nicht so sehr von Interesse, dass jede endliche Gruppe als Untergruppe einer symmetrischen Gruppe (vom Grad gleich der Ordnung der gegebenen Gruppe) auftritt (was die Darstellungstheorie im Allgemeinen noch nicht wesentlich vereinfacht). Vielmehr führt die explizite Beschreibung der Irreps und Charaktere der symmetrischen Gruppe für sich auf sehr reichhaltige kombinatorische Strukturen, die an vielen anderen Stellen von grossem Nutzen sind. Insbesondere besteht ein enger Zusammenhang mit der Darstellungstheorie der klassischen Gruppen (Schur-Weyl-Dualität).

Es sei noch einmal betont, dass wir in dieser Vorlesung nur die Darstellungstheorie über einem Körper der Charakteristik 0 (sc. den komplexen Zahlen) behandeln.

§ 3.1 Bereitstellung

· Sei n eine positive ganze Zahl. Die symmetrische Gruppe vom Grad n ist die Gruppe der Bijektionen der Menge $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Notation:

$$S_n \ni \sigma : N \ni a \mapsto \sigma_a \quad (3.1)$$

· Die Ordnung der symmetrischen Gruppe ist $|S_n| = n!$.
· Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ zerfällt $N = \{1, 2, \dots, n\}$ unter der Wirkung der von σ erzeugten Untergruppe in Orbits, welche Zyklen genannt werden. Für $i = 1, 2, \dots$ bezeichnen wir mit k_i die Anzahl Zyklen der Länge i und ordnen so σ ihren *Zykeltyp*

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r), \quad \sum_{i=1}^r ik_i = n \quad (3.2)$$

zu. (Hier sei r der grösste Index mit $k_r \neq 0$ ist. Manchmal ist es praktisch, noch mit weiteren Nullen aufzufüllen.)

· In der Algebra beweist man, dass zwei Permutationen genau dann konjugiert zueinander sind, falls sie den gleichen Zykeltyp besitzen. Wir bezeichnen mit $C_{\vec{k}} \subset S_n$ die Konjugationsklasse vom Zykeltyp \vec{k} .

· Nach der Darstellungstheorie endlicher Gruppen hat S_n dann genauso viele Irreps wie es Vektoren (3.2) (mit variablem r) gibt. Während es jedoch im Allgemeinen zur Herstellung der Korrespondenz zwischen den Irreps und den Konjugationsklassen

der Charaktere bedarf, gibt es im Falle der symmetrischen Gruppe eine erstaunlich direkte Beziehung schon in der Bezeichnung der beiden Sorten von Objekten.

· Die kombinatorische Vorrichtung, die in natürlicher Weise die Irreps kodiert, sind die *Partitionen* von n , fallende Folgen von ganzen Zahlen mit Quersumme n :

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s), \quad \sum_{j=1}^s \lambda_j = n \quad (3.3)$$

· Die eins-zu-eins Korrespondenz zwischen (3.2) und (3.3) lässt sich am einfachsten über die Visualisierung durch *Young-Diagramme* einsehen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & r & & \\ & & & & & & \\ \lambda_1 & \square & \square & \square & \dots & \square & \square \\ \lambda_2 & \square & \square & \square & \dots & \square & \square \\ \lambda_3 & \square & \square & \square & \dots & \square & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda_{s-1} & \square & & & & & \\ \lambda_s & \square & & & & & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} k_r \\ k_{r-1} \\ k_1 \end{array} \quad (3.4)$$

· Unser Ziel ist es nun, die irreduziblen Darstellungen $(V_\lambda, \rho_\lambda)$ von S_n über das zugehörige Young-Diagramm zu beschreiben und dann einen Algorithmus für die Berechnung der Charaktere

$$\chi_{V_\lambda}(C_{\vec{k}}) =: \chi_\lambda(\vec{k}) \quad (3.5)$$

anzugeben, durch die die Menge der Young-Diagramme mit n Kästchen zu einem inneren Produktraum wird.

· Es sei auch an die Tatsache erinnert, dass S_n von Transpositionen (Vertauschen von zwei Elementen von N)

$$\tau_{ab} : (1, 2, \dots, a, \dots, b, \dots, n) \rightarrow (1, 2, \dots, b, \dots, a, \dots, n) \quad (3.6)$$

erzeugt wird, wobei sogar noch die $\tau_a := \tau_{a,a+1}$ mit $b = a + 1$ und $a = 1, \dots, n - 1$ ausreichen.

· Da die Relationen zwischen den τ_a ,

$$\begin{aligned} (\tau_a)^2 &= e, & \tau_a \tau_b &= \tau_b \tau_a \quad \text{für } |a - b| > 1 \\ \tau_a \tau_{a+1} \tau_a &= \tau_{a+1} \tau_a \tau_{a+1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

von homogenem Grad mod2 sind, ist die *Signatur*, welche jeder Permutation die Parität (± 1) der Anzahl notwendiger Transpositionen zuordnet, als Homomorphismus

$$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}/2, \quad \text{sgn}(\tau_a) = -1 \quad (3.8)$$

wohldefiniert.

3.2. DIE IRREDUZIBLEN DARSTELLUNGEN

§ 3.2 Die irreduziblen Darstellungen

· Unser Ausgangspunkt ist die Gruppenalgebra

$$\mathbb{C}S_n = \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)\sigma, f(\sigma) \in \mathbb{C} \right\} \quad (3.9)$$

ausgerüstet mit der Linksmultiplikation als die reguläre Darstellung L von S_n , die ja wie wir wissen alle Irreps enthält.

· Wir definieren zunächst für jede Partition λ von n eine Projektion $Y_\lambda : \mathbb{C}S_n \rightarrow V_\lambda$. Dann beweisen wir, dass die V_λ irreduzible Darstellungen sind und dass verschiedene Partitionen nicht-isomorphe Darstellungen geben. Da die Anzahl der Irreps gleich der Anzahl Partitionen ist, folgt dann aus der allgemeinen Theorie, dass wir damit alle gefunden haben. Zum Schluss geben wir einen Algorithmus zur Berechnung der Charaktere an.

· Die Projektion Y_λ wird definiert über Rechtsmultiplikation mit einem ausgewählten Element $c_\lambda \in \mathbb{C}S_n$:

$$V_\lambda := \mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda \quad (3.10)$$

dem sogenannten *Young-Symmetrisator*. (Da Links- und Rechtsmultiplikation vertauschen, wäre $\mathbb{C}S_n \cdot x$ ein invarianter Unterraum von $(\mathbb{C}S_n, L)$ für jedes Element $x \in \mathbb{C}S_n$. Beispielsweise ist für $x = \sigma \in S_n$, $\mathbb{C}S_n \cdot \sigma \cong \mathbb{C}S_n$, für $x = \sum \sigma$ ist $\mathbb{C}S_n \cdot \sum \sigma = \mathbb{C} \sum \sigma$ die triviale ein-dimensionale Darstellung. Wir wählen c_λ so, dass V_λ irreduzibel wird.)

· Zur Definition von c_λ sowie zur Durchführung der kombinatorischen Beweise führen wir noch das Konzept eines *Young-Tableaus der Form λ* ein als ein mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$ gefülltes Young-Diagramm λ . So ist z.B.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \quad (3.11)$$

ein Young-Tableau der Form $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (3, 2)$ als Partition von 5.

· Etwas formaler ist ein Young-Tableau der Form λ eine Zerlegung von N in *diskunkte* und *geordnete* Mengen

$$N = t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_s \quad (3.12)$$

der Mächtigkeit $|t_j| = \lambda_j$.

· Das *kanonische Tableau* sei das zur offensichtlichen (d.h. $t_1 = \{1, \dots, \lambda_1\}$ etc.) Zerlegung gehörige und ein *standard* Tableau habe monoton wachsende Zeilen und Spalten. Das Beispiel (3.11) zeigt sofort, dass es mehr standard Tableaux gibt als nur das kanonische.

· Wir denken uns ein Tableau auch als die Permutation $T \in S_n$, die es aus dem kanonischen erzeugt, "auf die Form λ gebracht":

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline T(1) & T(2) & \dots & T(\lambda_1) \\ \hline T(\lambda_1+1) & \dots & \dots & \\ \hline \vdots & \vdots & & \\ \hline T(n) & & & \\ \hline \end{array} \quad (3.13)$$

- S_n wirkt “von links” auf die Young-Tableaux der Form λ , und der Vektorraum, der von den Tableaux der Form λ aufgespannt wird, ist isomorph zu $\mathbb{C}S_n$. Ein (nicht leicht zu beweisendes) Korollar aus der Konstruktion ist, dass unter diesem Isomorphismus V_λ von den standard Tableaux der Form λ aufgespannt wird.
- Für ein Young-Tableau $T = \{t_1, \dots, t_s\}$ definieren wir nun den *Zeilen-Stabilisator* als die Untergruppe

$$P_T := \{\pi \in S_N, \pi(t_j) = t_j \ \forall j \text{ (als ungeordnete Menge)}\} \subset S_n$$

$$\cong \prod_{j=1}^s S_{\lambda_j} \quad (\text{Produkt von Gruppen}) \tag{3.14}$$

und analog den *Spalten-Stabilisator* als den Zeilen-Stabilisator des transponierten Tableaus

$$Q_T := \{\xi \in S_N, \xi(t_j^*) = t_j^*\} \cong \prod_{j=1}^{s^*} S_{\lambda_j^*} \tag{3.15}$$

(Hier ist $\lambda_j^* = \#\{i, \lambda_i \geq j\}$ und entsprechende Definition für T^* . Das transponierte von (3.11) ist z.B. $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$.)

- Man beachte, dass P_T, Q_T als abstrakte Gruppen nur von λ abhängen, die Einbettung in S_n aber auch von T . Wir halten fest, dass für $T' = \sigma T$ ($\sigma \in S_n$),

$$P_{T'} = \sigma P_T \sigma^{-1}, \quad Q_{T'} = \sigma Q_T \sigma^{-1} \tag{3.16}$$

Zur Begründung reicht es aus, für T das kanonische Tableau zu nehmen, und $T' = \sigma$ “in der Form λ ”. Dann ist z.B. die erste Zeile von $\pi' T'$ gleich $\boxed{\pi'\sigma(1)} \quad \boxed{} \quad \cdots \quad \boxed{\pi'\sigma(\lambda_1)}$

Vergleicht man dies mit $\boxed{\sigma\pi(1)} \quad \boxed{} \quad \cdots \quad \boxed{\sigma\pi(\lambda_1)}$, so sieht man schnell: π stabilisiert die Zeilen des kanonischen Tableaus (d.h. π fixiert $t_1 = \{1, \dots, \lambda_1\}$) $\Leftrightarrow \pi' = \sigma\pi\sigma^{-1}$ stabilisiert die Zeilen von T' .

- Wir konzentrieren uns nun auf das kanonischen Tableau und lassen das Subskript weg. Wir setzen

$$p := \sum_{\pi \in P} \pi \in \mathbb{C}S_n$$

$$q := \sum_{\xi \in Q} \text{sgn}(\xi)\xi \in \mathbb{C}S_n \tag{3.17}$$

und definieren den Young-Symmetrisator als

$$c = c_\lambda := pq = \sum_{\substack{\pi \in P \\ \xi \in Q}} \text{sgn}(\xi)\pi\xi \in \mathbb{C}S_n \tag{3.18}$$

Unser Schlachtruf ist: “**Symmetrisiere über die Zeilen, anti-symmetrisiere über die Spalten**”, und der Satz lautet:

3.2. DIE IRREDUZIBLEN DARSTELLUNGEN

Theorem 3.1. *Es existiert ein Normierungsfaktor $\mathcal{N} \in \mathbb{Q} \setminus 0$ derart dass $c_\lambda^2 = \mathcal{N}c_\lambda$, d.h. bis auf ein skalares Vielfache ist c_λ eine Projektion.*

$$V_\lambda := \mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda, \quad (3.19)$$

aufgefasst als Unterdarstellung von $(\mathbb{C}S_n, L)$ ist irreduzibel. Jede Irrep von S_n ist isomorph zu solch einem V_λ für ein eindeutiges Young-Diagramm λ .

Bemerkungen. Hätten wir statt dem kanonischen Tableau T ein anderes Tableau $T' = \sigma T$ benutzt, so wäre wie oben festgehalten

$$c_{\lambda, \sigma} = \sigma c_\lambda \sigma^{-1} \quad (3.20)$$

und daher

$$V_{\lambda, \sigma} = \mathbb{C}S_n \cdot c_{\lambda, \sigma} = \underbrace{\mathbb{C}S_n \sigma}_{=\mathbb{C}S_n} \cdot c_\lambda \cdot \sigma^{-1} = V_\lambda \cdot \sigma^{-1} \quad (3.21)$$

durch Rechtsmultiplikation mit σ^{-1} isomorph zu V_λ als Darstellung von S_n , im allgemeinen aber nicht identisch mit V_λ als Unterraum von $\mathbb{C}S_n$.

Aufgrund der allgemeinen Theorie des Kapitels 2 hat ja der Vektorraum der S_n -Einbettungen von V_λ in $\mathbb{C}S_n$ die Dimension $\dim V_\lambda$ (Lemma von Schur). Man könnte zeigen, dass dieser Raum von

$$\{\text{Rechtsmultiplikation mit } \sigma^{-1}, \sigma T \text{ ein standard Tableau}\} \quad (3.22)$$

aufgespannt wird. Dies ist ähnlich dazu, dass V_λ für festgehaltenes T die standard Tableaux als Basis hat.

· Zur Vorbereitung des Beweises von Theorem 3.1 bemerken wir noch, dass

$$\begin{aligned} \forall \pi \in P : \quad \pi p &= p\pi = p \\ \forall \xi \in Q : \quad \xi q &= q\xi = \text{sgn}(\xi)q \end{aligned} \quad (3.23)$$

und daher

$$\forall \pi \in P, \xi \in Q : \quad \pi c \xi = \pi p q \xi = \text{sgn}(\xi)c \quad (3.24)$$

Lemma 3.2. *Sei $x \in \mathbb{C}S_n$ derart, dass $\pi x \xi = \text{sgn}(\xi)x \forall \pi \in P, \xi \in Q$. Dann existiert eine komplexe Zahl α derart, dass*

$$x = \alpha c \quad (3.25)$$

Beweis. · Die wesentliche Beobachtung ist, dass $P \cap Q = \{e\}$. (Man kann eine Permutation der Spalten nicht durch ein Umordnen der Zeilen reparieren.) Daher tritt in $c = \sum \text{sgn}(\xi)\pi\xi$ jedes $\pi\xi$ genau einmal auf, und zwar mit dem Koeffizienten $c(\pi\xi) = \text{sgn}(\xi)^{-1}$ (Insbesondere ist $ec = c \neq 0$, also $\mathbb{C}S_n c \neq 0$.)

· Schreiben wir nun für x wie angenommen

$$x = \sum_{\sigma} x(\sigma)\sigma = \sum_{\pi\xi \in PQ} x(\pi\xi)\pi\xi + \sum_{\sigma \in S_n \setminus PQ} x(\sigma)\sigma \quad (3.26)$$

¹Wir identifizieren Elemente von $\mathbb{C}S_n$ ja mit Funktionen auf S_n .

so folgt zunächst aus $\pi x = x \forall \pi \in P$, dass $x(\pi\xi) = x(\xi) \forall \pi \in P, \xi \in Q$. (Denn $\pi\sigma \notin PQ$ falls $\sigma \notin PQ$), und dann aus $x\xi = \text{sgn}(\xi)x$ in analoger Weise $x(\xi) = \text{sgn}(\xi)x(e) \forall \xi \in Q$.

- Mit $\alpha = x(e)$ folgt daher $x = \alpha c$ falls wir noch zeigen, dass $x(\sigma) = 0 \forall \sigma \notin PQ$.
- Zu diesem Zwecke betrachte wir für $\sigma \in S_n$ das Young-Tableau $T' = \sigma T$ und vergleichen es mit dem kanonischen Tableau T . Es gilt das

*Taubenschlagprinzip 1:*² Falls alle Elemente von $N = \{1, 2, \dots, n\}$, die in der gleichen Zeile von T vorkommen, in verschiedenen Spalten von T' sitzen, so können wir zunächst die Spalten von T' so umordnen, dass alle Elemente von N , die in der gleichen Zeile von T sitzen, ebenfalls in der gleichen Zeile von $\xi'T'$ sitzen für ein geeignetes $\xi' \in Q_{T'}$. Dann können wir durch Umordnen der Zeilen von T erreichen, dass

$$\pi T = \xi' T' \quad \text{mit } \pi \in P = P_T \quad (3.27)$$

Nach obigen Bemerkungen ist $\xi' = \sigma\xi\sigma^{-1}$, $\xi \in Q$, $T' = \sigma T$, also

$$\begin{aligned} \pi = \sigma\xi &\Rightarrow \sigma = \pi\xi^{-1}, \quad \pi \in P, \xi^{-1} \in Q \\ &\Rightarrow \sigma \in PQ \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ist also $\sigma \notin PQ$, so existieren Elemente $a, b \in N$, die in der gleichen Zeile von T , und in der gleichen Spalte von T' sitzen. Damit gilt für die Transposition $\tau = \tau_{ab} \in S_n$ von a und b :

$$\tau \in P \quad \text{und} \quad \tau \in Q_{T'}, \text{ d.h. } \sigma^{-1}\tau\sigma \in Q \quad (3.29)$$

also ist für solches σ :

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= x(\tau^2\sigma) = x(\tau\sigma\sigma^{-1}\tau\sigma) \\ &= x(\sigma) \text{sgn}(\sigma^{-1}\tau\sigma) = -x(\sigma) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

OEΔ

Am Schluss des Beweises von Theorem 3.1 brauchen wir noch ein zweites Lemma, welches die folgende Ordnung auf den Partitionen von n benutzt:

Seien $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r)$ und $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s)$ zwei Partitionen von n . Dann schreiben wir $\lambda > \mu$ falls die erste nicht-verschwindende $\lambda_i - \mu_i > 0$, d.h.

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_{i-1} = \mu_{i-1}, \lambda_i > \mu_i \quad (3.31)$$

(alphabetische Ordnung).

Lemma 3.3. Falls $\lambda > \mu$, dann gilt $\forall x \in \mathbb{C}S_n$:

$$p_\lambda x q_\mu = 0 = q_\mu x p_\lambda \quad (3.32)$$

Insbesondere gilt $c_\lambda c_\mu = 0$. (Es gilt auch $c_\mu c_\lambda$, aber das brauchen wir nicht.)

Beweis. Wir zeigen $p_\lambda \sigma q_\mu = 0 \forall \sigma \in S_n$. Sei dazu T wie gehabt das kanonische Tableau der Form λ und U das kanonische Tableau der Form μ . Dann ist $\sigma U = U'$ ein weiteres Tableau der Form μ und $\sigma q_\mu \sigma^{-1} = q_{\mu, \sigma}$. Es genügt also zu zeigen, dass $p_\lambda q_{\mu, \sigma} = 0$ für jedes Tableau $U' = \sigma U$ der Form μ . Nun gilt das

²Ein Meditationsvorschlag für Sonntag Morgen.

3.2. DIE IRREDUZIBLEN DARSTELLUNGEN

Taubenschlagprinzip 2: Falls $\lambda > \mu$, so existieren Elemente $a, b \in N$, die in der gleichen Zeile von T und in der gleichen Spalte von U' vorkommen. ³

Mit $\tau = \tau_{ab}$ der Transposition von a und b folgt dann

$$p_\lambda q_{\mu,\sigma} = \tau p_\lambda q_{\mu,\sigma} = p_\lambda \tau q_\mu = -p_\lambda q_{\mu,\sigma} = 0 \quad (3.33)$$

OEΔ

Beweis von Theorem 3.1. Der Reihe nach:

Beh.: $c_\lambda \cdot c_\lambda = \mathcal{N}c_\lambda$

Bew.: Für alle $\pi \in P$, $\xi \in Q$ gilt $\pi c_\lambda = c_\lambda$ und $c_\lambda \xi = \text{sgn}(\xi)c_\lambda$, und daher

$$\pi c_\lambda \cdot c_\lambda \xi = \text{sgn}(\xi)c_\lambda c_\lambda \quad (3.34)$$

also folgt aus Lemma 3.2, dass $\exists \mathcal{N} \in \mathbb{C}$ mit $c_\lambda^2 = \mathcal{N}c_\lambda$. Um zu zeigen, dass $\mathcal{N} \in \mathbb{Q} \setminus 0$, wollen wir es berechnen: Wegen $c_\lambda(e) = 1$ ist die Spur der Rechtsmultiplikation mit c_λ auf $\mathbb{C}S_n$ gleich $n!$. Andererseits bildet c_λ jedes $xc_\lambda \in \mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda$ auf \mathcal{N} mal sich selbst ab und alles im Komplement auf $\mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda$. Also ist die Spur der Rechtsmultiplikation mit c_λ auf $\mathbb{C}S_n = \mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda \oplus \text{Komplement}$ auch gleich $\dim V_\lambda \cdot \mathcal{N}$. Es folgt (auch wegen $\dim V_\lambda \neq 0$)

$$\mathcal{N} = \frac{n!}{\dim V_\lambda} \quad (3.35)$$

Beh.: Die V_λ sind irreduzibel.

Bew.: Für einen invarianten Unterraum $W \subset V_\lambda$ betrachten wir $c_\lambda W$. Da $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$ wegen Lemma 3.2 ein-dimensional ist, muss entweder $c_\lambda W = \mathbb{C}c_\lambda$ oder $c_\lambda W = 0$ sein. · Falls $c_\lambda W = \mathbb{C}c_\lambda$, so existiert ein $w \in W$, so dass $c_\lambda w = c_\lambda$. Da aber jedes $v \in V_\lambda$ von der Form $v = xc_\lambda$ ist mit $x \in \mathbb{C}S_n$, folgt

$$v = xc_\lambda = xc_\lambda w \in W \quad (3.36)$$

Also ist $V_\lambda = W$

· Falls $c_\lambda W = 0$, so ist $c_\lambda W^\perp = \mathbb{C}c_\lambda$ (für den komplementären invarianten Unterraum W^\perp von W in V_λ , vgl. Satz von Maschke 2.5). Dann folgt wie eben $W^\perp = V_\lambda$, also $W = 0$.

Beh.: Falls $\lambda > \mu$, so sind V_λ und V_μ nicht isomorph.

Bew.: Es gilt $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$ nach Lemma 3.2, aber $c_\mu V_\lambda = c_\mu \mathbb{C}S_n c_\lambda = 0$ nach Lemma 3.3. Ein S_n -Isomorphismus $V_\mu \cong V_\lambda$ müsste aber $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$ mit $c_\mu V_\lambda = 0$ identifizieren, was unmöglich ist. Daher kann kein solcher Isomorphismus existieren.

· Damit haben wir genauso viele Irreps gefunden, wie es Konjugationsklassen in S_n gibt. Nach den allgemeinen Resultaten aus Kapitel 2 sind dies dann alle. OEΔ

³Mein Zen: Betrachte etwa $T = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \cdot \square$, $U' = \begin{array}{cccc} 1 & * & 3 & * \\ \circ & 4 & \circ & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \cdot \square$. Man schöpfe in der Zeilenlängenreihenfolge von T aus U' die Einträge der Zeilen von T ab. Solange $\lambda_i = \mu_i$ ist, ist es möglich, dass diese Zeileneinträge in verschiedenen Spalten von U' sitzen. Im Beispiel erhält man die abgeschöpften Tableaux $\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \cdot$ und $\begin{array}{cccc} \square & * & \square & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \cdot$. Sobald $\lambda_i > \mu_i$ gibt es nicht mehr genügend Kästchen auf der rechten Seite und es müssen Spalten von U' doppelt benutzt werden.

Beispiel 3.4. Wir verifizieren, dass die 2-dimensionale Darstellung von S_3 (siehe (1.9), (1.10)) zur Partition $3 = 2 + 1$ gehört. Das Young-Diagramm ist $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$. Das kanonische Tableau ist $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$, der zugehörige Young-Symmetrisator

$$c_\lambda = (1 + (12))(1 - (13)) = 1 + (12) - (13) - (132) \quad (3.37)$$

Hierbei bezeichnen runde Klammern Zykel $(a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots)$, deren Verknüpfung wir z.B. durch die Wirkung auf $N = \{1, 2, 3\}$ bestimmen:

$$(12)(13)\{1, 2, 3\} = (12)\{3, 2, 1\} = \{3, 1, 2\} = (132)\{1, 2, 3\} \quad (3.38)$$

Benutzen wir für $\mathbb{C}S_3$ eine geschweifte Notation, so ist⁴

$$\begin{aligned} Y_\lambda(\{1, 2, 3\}) &= \{1, 2, 3\} + \{2, 1, 3\} - \{3, 2, 1\} - \{3, 1, 2\} =: e_1 \\ Y_\lambda(\{1, 3, 2\}) &= (2, 3)(Y_\lambda\{1, 2, 3\}) = \{1, 3, 2\} + \{3, 1, 2\} - \{2, 3, 1\} - \{2, 1, 3\} =: e_2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Damit gilt $(23)e_1 = e_2$, $(23)e_2 = e_1$ sowie

$$\begin{aligned} (12)e_1 &= \{2, 1, 3\} + \{1, 2, 3\} - \{3, 1, 2\} - \{3, 2, 1\} = e_1 \\ (12)e_2 &= \{2, 3, 1\} + \{3, 2, 1\} - \{1, 3, 2\} - \{1, 2, 3\} = -e_2 - e_1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Da S_3 von (12) und (23) erzeugt wird, folgt bereits, dass der von e_1 und e_2 aufgespannte Unterraum invariant ist. Aus $\text{tr}(23) = \text{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\text{tr}(23)(12) = \text{tr}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$ folgt durch Vergleich mit der Charaktertafel (2.24), dass die Darstellung $V_{(2,1)}$ isomorph zu ρ_2 aus (1.9) und (1.10) ist. Die mit Young-Diagrammen für Irreps und Konjugationsklassen verzierte Charaktertafel ist damit:

$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	1	1	1
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$	1	-1	1
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$		2	0	1

(3.41)

Hätten wir statt dem kanonischen das andere standard Tableau $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$ benutzt, so wäre der entsprechende Young-Symmetrisator

$$c'_\lambda = (1 + (13))(1 - (12)) = 1 + (13) - (12) - (123) \quad (3.42)$$

und

$$\begin{aligned} e'_1 &= \{1, 2, 3\} + \{3, 2, 1\} - \{2, 1, 3\} - \{2, 3, 1\} \\ e'_2 &= \{1, 3, 2\} + \{2, 3, 1\} - \{3, 1, 2\} - \{3, 2, 1\} = (23)e'_1 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Der von e'_1 und e'_2 aufgespannte Unterraum ist wieder isomorph zu ρ_2 . Man verifiziert leicht, dass e_1, e_2, e'_1, e'_2 linear unabhängig sind und zusammen mit $\sum_{S_3} \sigma$ und $\sum_{S_3} \text{sgn}(\sigma)\sigma$ die Gruppenalgebra $\mathbb{C}S_3$ aufspannen.

⁴Wir unterschlagen den Normierungsfaktor.

3.3. DIE CHARAKTERTAFEL DER SYMMETRISCHEN GRUPPE

· Diese Betrachtungen illustrieren die Aussage, dass die standard Tableaux eine Basis sowohl von V_λ als auch der Einbettungen $\text{Hom}_{S_n}(V_\lambda, \mathbb{C}S_n) = V_\lambda^*$ liefern. Der allgemeine Beweis dieser Aussage führte uns hier zu weit. Eine mögliche Strategie wäre gewesen, zunächst die lineare Unabhängigkeit der standard Tableaux zu zeigen (was einfacher ist als die Erzeugendeneigenschaft), und anschliessen kombinatorisch zu verifizieren, dass

$$n! = |S_n| = \sum_{\substack{\lambda \text{ Part.} \\ \text{von } n}} \left(\#\{\text{standard Tableaux der Form } \lambda\} \right)^2 \quad (3.44)$$

Der Verweis auf (2.37) schliesse dann den Beweis ab. Siehe z.B. Barry Simon, “Representations of Finite and Compact Groups”, GSM 10, AMS 1995 oder auch G. D. James, “The representation theory of the symmetric groups”, LNM 682, Springer 1978

§ 3.3 Die Charaktertafel der symmetrischen Gruppe

In dem zuletzt zitierten Buch findet sich auch der folgende Algorithmus für die Charaktertafel, der als Alternative zur Frobenius-Formel ohne symmetrische Funktionen auskommt, aber dennoch rechnerisch recht effizient ist:

· Wir wollen also für eine durch den \vec{k} -Vektor

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \dots), \quad \sum ik_i = n \quad (3.45)$$

gegebene Konjugationsklasse und eine durch eine Partition

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots), \quad \sum \lambda_j = n \quad (3.46)$$

definierte Irrep den Charakter

$$\chi_\lambda(\vec{k}) = \text{tr}_{V_\lambda} \sigma, \quad \sigma \in C_{\vec{k}} \quad (3.47)$$

berechnen.

· Wir erinnern daran, dass $V_\lambda = \mathbb{C}S_n c_\lambda = \mathbb{C}S_n p_\lambda q_\lambda$, mit

$$p_\lambda = \sum_P \pi, \quad q_\lambda = \sum_Q \text{sgn}(\xi) \xi \quad (3.48)$$

und dem Speilen- bzw. Zaltenstabilisator P und Q des kanonischen Young-Tableaus der Form λ .

· Es gilt (vgl. (3.14))

$$|P| = \prod_j \lambda_j! \quad (3.49)$$

und die Mächtigkeit der Konjugationsklasse ist gegeben durch

$$|C_{\vec{k}}| = \frac{n!}{|\text{Stabilisator von } C_{\vec{k}}|} = \frac{n!}{\prod_i i^{k_i} k_i!} \quad (3.50)$$

· Aus der allgemeinen Theorie wissen wir, dass die irreduziblen Charaktere orthogonal bezüglich dem inneren Produkt (2.25) sind, d.h.

$$\sum_{\vec{k}} \chi_\lambda(\vec{k}) \frac{C_{\vec{k}}}{n!} \chi_\mu(\vec{k}) = \delta_{\lambda\mu} \quad (3.51)$$

(Die Formeln unten werden zeigen, dass die χ_λ alle reell sind, und wir lassen die Konjugation daher weg.)

· Um dies als Matrixformel zu schreiben, einigen wir uns darauf, Partitionen (bei Bedarf auch zusammen mit den \vec{k} -Vektoren) lexikographisch zu ordnen, vgl. (3.31).

· Mit dieser Ordnung sei also $X = (X_{\lambda, \vec{k}})$ die Charaktertafel mit Partitionen als Zeilen-Index und \vec{k} -Vektoren als Spaltenindex. Sei ferner Σ die Diagonalmatrix

$$\Sigma_{\vec{k}\vec{l}} = \delta_{\vec{k}\vec{l}} \frac{|C_{\vec{k}}|}{n!} \quad (3.52)$$

sodass wir die Orthogonalität der Charaktere schreiben können als

$$X\Sigma X^T = 1 \quad (3.53)$$

(im “Raum der Partitionen”).

· Der erste Schritt zur eigentlichen *Berechnung* von X ist die Einführung der folgenden auxiliären Darstellungen W_λ von S_n , welche auch durch Partitionen indiziert sind, aber im allgemeinen nicht irreduzibel sind. Mit der gleichen Notation wie bisher setzen wir

$$W_\lambda := \mathbb{C}S_n \cdot p_\lambda \quad (3.54)$$

(d.h., wir symmetrisieren Young-Tableaux nur über die Zeilen).

· Der Character von W_λ kann durch relativ einfache Überlegungen berechnet werden. Es ist nämlich

$$\psi_\lambda(\vec{k}) = \text{tr}_{W_\lambda} \sigma = \#\{\tau \in S_n, \sigma\tau = \tau\pi \text{ für ein } \pi \in P_\lambda\} / P_\lambda \quad (3.55)$$

In Worten ist dies die Anzahl Tableaux, für welche die Wirkung von σ links durch ein Umordnen der Zeilen rechts repariert werden kann, modulo der Identifikation durch Zeilenpermutationen. Diest ist auch

$$\begin{aligned} \text{tr}_{W_\lambda} \sigma &= \#\{\tau \in S_n, \tau^{-1}\sigma\tau \in P_\lambda\} / P_\lambda \\ &= \frac{|P_\lambda \cap C_{\vec{k}}|}{|P_\lambda|} \cdot |\text{Stabilisator von } \sigma| \\ &= |P_\lambda \cap C_{\vec{k}}| \cdot \frac{n!}{|P_\lambda| |C_{\vec{k}}|} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Mit (3.49) und (3.50) ist damit die Berechnung von $\psi_\lambda(\vec{k})$ auf die Repartition der Faktoren von $P = \prod S_{\lambda_j}$ auf die Zykel in $C_{\vec{k}}$ zurückgeführt. Zum Aufwärmen überzeuge man sich, dass $\psi_\lambda(\vec{k}) = 0$ falls $\vec{k} > \lambda$ in der alphabetischen Ordnung: Der maximale Zykel in S_{λ_j} hat ja die Länge λ_j . (Die Matrix $\Psi = (\psi_\lambda(\vec{k}))$ ist daher eine

3.3. DIE CHARAKTERTAFEL DER SYMMETRISCHEN GRUPPE

untere Dreiecksmatrix, was aber für die weiteren Überlegungen keine Rolle spielt.)
 · Nach der allgemeinen Theorie existiert nun für jede Partition λ eine Zerlegung

$$W_\lambda \cong \bigoplus_{\mu} V_\mu^{\oplus K_\lambda^\mu} \quad (3.57)$$

in irreduzible Teile mit gewissen nicht-negativen ganzen Zahlen K_λ^μ (genannt Kostka-Zahlen).

Beh.: Die Matrix $K = (K_\lambda^\mu)$ ist eine obere Dreiecksmatrix und invertierbar. D.h. $K_\lambda^\mu = 0$ falls $\mu < \lambda$ und $K_\lambda^\lambda > 0$. (Es gilt sogar $K_\lambda^\lambda = 1$, und K ist über \mathbb{Z} invertierbar. Dies ist aber für uns nicht primär interessant.)

Bew.: Die zweite Behauptung folgt direkt aus der Tatsache, dass

$$V_\lambda = W_\lambda q_\lambda \quad (3.58)$$

d.h. Rechtsmultiplikation mit q_λ ist ein nicht-verschwindender S_n -Morphismus $W_\lambda \rightarrow V_\lambda$.

Für den ersten Teil verifizieren wir, dass falls $\lambda > \mu$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(W_\lambda, V_\mu) = \text{Hom}_{\mathbb{C}S_n}(\mathbb{C}S_n p_\lambda, \mathbb{C}S_n p_\mu q_\mu) = 0 \quad (3.59)$$

Um solch einen Morphismus $f : W_\lambda \rightarrow V_\mu$ zu spezifizieren, reichte es ja aus $f(p_\lambda) = x p_\mu q_\mu$ mit $x \in \mathbb{C}S_n$ anzugeben. (p_λ ist zyklischer Vektor für S_n .) Aber wegen $p_\lambda^2 \propto p_\lambda$ gilt

$$\begin{aligned} f(p_\lambda) &= \frac{1}{|P_\lambda|} f(p_\lambda^2) = \frac{1}{|P_\lambda|} p_\lambda f(p_\lambda) \\ &= \frac{1}{|P_\lambda|} p_\lambda x p_\mu q_\mu = 0 \quad \text{falls } \lambda > \mu \text{ wegen Lemma 3.3.} \end{aligned} \quad (3.60)$$

· Auf dem Niveau der Charaktere ist (3.57)

$$\psi_\lambda(\vec{k}) = \sum_{\mu} K_\lambda^\mu \chi_\mu(\vec{k}) \quad (3.61)$$

d.h.

$$\Psi = KX \quad (3.62)$$

Das innere Produkt der Charaktere der W_λ lässt sich dann durch die Irreps ausdrücken als (siehe (3.53)):

$$\Psi \Sigma \Psi^T = KX \Sigma X^T K^T = KK^T \quad (3.63)$$

· Mit einem kleinen Lemma aus der linearen Algebra liegt eine obere Dreiecksmatrix K mit positiven Einträgen auf der Diagonalen durch solch eine Gleichung (3.63) bereits vollständig fest. (Das Lemma besagt zunächst nicht, dass K ganzzahlig ist; dies folgt aber aus den allgemeinen Prinzipien.)

· Zuguterletzt:

$$X = K^{-1} \Psi \quad (3.64)$$

und wir sind fertig.

§ 3.4 Symmetrische Funktionen

Wir beschreiben nur die Berechnung von $|P_\lambda \cap C_{\vec{k}}|$ in (3.56): Konjugationsklassen in $P_\lambda = \prod_j S_{\lambda_j}$ sind bezeichnet durch Kollektionen $(\vec{r}_j) = (r_{ij})$ derart dass

$$\lambda_j = \sum_i i r_{ij} \quad (3.65)$$

Um ein Element in der Konjugationsklasse $C_{\vec{k}}$ von S_n zu bekommen, brauchen wir

$$\sum_j r_{ij} = k_i \quad (3.66)$$

Es gilt also (vgl. (3.50))

$$|P_\lambda \cap C_{\vec{k}}| = \sum_{(r)} \prod_j \frac{\lambda_j!}{\prod_i i^{r_{ij}} r_{ij}!} \quad (3.67)$$

und daher (siehe (3.56))

$$\psi_\lambda(\vec{k}) = \frac{\prod_i i^{k_i} k_i!}{\prod_j \lambda_j!} \sum_{(r)} \prod_j \frac{\lambda_j!}{\prod_i i^{r_{ij}} r_{ij}!} = \sum_{(r)} \prod_i \frac{k_i!}{\prod_j r_{ij}!} \quad (3.68)$$

wo die Summe über alle Lösungen (r) von (3.65) und (3.66) läuft.

· Nach einer Beobachtung, die auf Frobenius zurückgeht, ist diese Kombination genau der Multinomialkoeffizient von

$$x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_s^{\lambda_s} \quad (3.69)$$

im symmetrischen Polynom⁵

$$P^{(\vec{k})} = (x_1 + \cdots + x_s)^{k_1} (x_1^2 + \cdots + x_s^2)^{k_2} \cdots (x_1^r + \cdots + x_s^r)^{k_r} \quad (3.70)$$

Wir schreiben

$$\psi_\lambda(\vec{k}) = [P^{(\vec{k})}]_\lambda \quad (3.71)$$

als Ausgangspunkt einer langen Story, an deren Ende die Frobenius-Formel für die irreduziblen Charaktere steht:

$$\chi_\lambda(\vec{k}) = [\Delta P^{(\vec{k})}]_l \quad (3.72)$$

wo $P^{(\vec{k})}$ wie oben ist, $\Delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ die Vandermonde Determinante, und $l = (\lambda_1 + s - 1, \lambda_2 + s - 2, \dots, l_{s-1} + 1, \lambda_s)$. Der Beweis von (3.72) erfordert etwas Geduld, enthält aber explizite Algorithmen insbesondere auch für die Kostka-Zahlen, sowie die berühmte Hakenlängenformel für die Dimensionen der Irreps

$$\dim V_\lambda = \frac{n!}{\prod_{\text{Kästchen}} \text{Hakenlänge}} \quad (3.73)$$

⁵Das Polynom ist offenbar invariant unter Permutation der Variablen.

KAPITEL 4

KONTINUIERLICHE UND DIFFERENZIERBARE GRUPPEN

Wir haben uns bisher mit der Darstellungstheorie endlicher Gruppen beschäftigt und gesehen, wie sich deren irreduzible Darstellungen (zumindest über den komplexen Zahlen) vollständig beschreiben lassen. Die symmetrische Gruppe lieferte uns ein instruktives Beispiel mit einer sehr anwendungsreichen Struktur.

Für unendliche Gruppen lässt sich im Allgemeinen wenig sagen, ohne dass weitere Annahmen gemacht werden, die die Algebra geeignet einschränken. Ein wichtiges Beispiel für solche Voraussetzungen sind kontinuierliche Strukturen.

§ 4.1 Topologische Gruppen

Definition 4.1. Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe G , welche mit einer Topologie ausgestattet ist (d.h. ein System von Teilmengen von G , welches die leere Menge und ganz G enthält und unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist), derart dass die Gruppen-Operationen,¹

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G, & (x, y) &\mapsto m(x, y) = xy \\ \iota : G &\rightarrow G, & x &\mapsto \iota(x) = x^{-1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

stetige Abbildungen sind, d.h. Urbilder offener Mengen sind offen. Man sagt, die Topologie ist *verträglich* mit der Gruppenstruktur.

Bemerkungen. · In der Definition ist $G \times G$ als mit der Produkttopologie versehen aufzufassen. Dies ist die grösste Topologie, in welcher die Projektionen auf die Faktoren stetig sind. Mit anderen Worten ist dies die Topologie, welche von Produktmengen der Form $U_1 \times U_2$ mit $U_{1,2} \subset G$ offen, erzeugt wird.

· Es genügt offenbar, die Stetigkeit von $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ zu prüfen.

Lemma 4.2. Sei G eine topologische Gruppe. Für jedes $x \in G$ ist die *Linkstranslation*

$$L_x = m(x, \cdot) : G \rightarrow G, \quad y \mapsto L_x(y) = m(x, y) = xy \tag{4.2}$$

stetig. (Gleiches gilt natürlich für die *Rechtstranslation* $R_x = m(\cdot, x)$. Wegen $L_{x^{-1}} \circ L_x = \text{id}_G$ ist L_x sogar ein *Homöomorphismus*.)

¹In diesem Abschnitt werden zur Betonung der topologischen Struktur Gruppenelemente mit x, y, \dots bezeichnet.

Beweis. Sei W eine offene Umgebung von $xy \in G$. Wegen der Stetigkeit von $m : G \times G \rightarrow G$ ist $m^{-1}(W)$ eine offene Umgebung von $(x, y) \in G \times G$. Gemäss der Definition der Produkttopologie gibt es offene Umgebungen $U \ni x, V \ni y$, so dass $U \times V \subset m^{-1}(W)$. Dann ist aber insbesondere $xV \subset W$, d.h. $V \subset (L_x)^{-1}(W)$. Damit ist L_x stetig. OEΔ

Bemerkungen. · Im Prinzip lassen sich alle Konzepte der elementare Topologie mit der Gruppenstruktur verbinden, wie z.B. die Begriffe der stetigen Abbildungen und des Zusammenhangs. Von besonderer Bedeutung ist der Begriff der Kompaktheit.
 · Für gewöhnlich verlangt man, dass die Topologie auf G hausdorffsch ist (d.h. das Trennungssaxiom T_2 , dass je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen besitzen, ist erfüllt). Als Beispiel für die aus der Gruppenstruktur resultierenden Einschränkungen an die kontinuierlichen Strukturen zeigen wir, dass dies gar keine schwerwiegende Annahme ist.

Proposition 4.3. *Sei G eine topologische Gruppe.*

- (i) *Falls Punkte in G abgeschlossen sind (d.h. G ist T_1), so ist G bereits hausdorffsch.*
- (ii) *Falls G nicht T_1 ist, sei H der Abschluss von $\{e\}$. Dann ist H eine normale Untergruppe von G , und G/H , versehen mit der Quotiententopologie ist T_1 , und daher eine hausdorffsche topologische Gruppe.*

Beweis. (i) Die wesentliche Idee ist die Ausnutzung der Translationsinvarianz der Topologie, d.h. $L_x U$ ist offen $\Leftrightarrow U$ ist offen, siehe Beweis des obigen Lemmas.

· Wir müssen zeigen, dass für beliebige $x \neq y$ Umgebungen $U \ni x, V \ni y$ existieren mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen der Translationsinvarianz genügt es, $y = e$ anzunehmen, $e \neq x \in G$ beliebig.

· Da G ein T_1 -Raum ist, ist $W = G \setminus \{x\}$ offen, und eine Umgebung von e .

· Wegen der Stetigkeit der Multiplikation ist $m^{-1}(W)$ eine offene Umgebung von $(e, e) \in G \times G$.

· Nach der Definition der Produkttopologie existieren offene Umgebungen U_1, U_2 von e mit $U_1 \times U_2 \subset m^{-1}(W)$, d.h. $U_1 U_2 \subset W$.

· Setzen wir $\tilde{U} = U_1 \cap U_2$, so gilt $\tilde{U} \tilde{U} \subset W$, und nach wie vor $e \in \tilde{U}$.

· $U = \tilde{U} \cap \tilde{U}^{-1}$ erfüllt dann nebst $UU \subset W$ auch $U = U^{-1}$. (Hier ist $U^{-1} := \{g \in G \mid g^{-1} \in U\}$ und ähnlich für \tilde{U}^{-1} .)

· U ist eine offene Umgebung von e und xU eine offene Umgebung von x . Wir behaupten, dass $U \cap xU = \emptyset$: Tatsächlich folgte ja aus $xu_1 = u_2$ mit $u_{1,2} \in U$, dass $x = u_2 u_1^{-1} \in UU^{-1} \subset W$, was aber im Widerspruch zu $x \notin W$ stünde.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass H eine Untergruppe von G ist, d.h. für alle $x, y \in H$ ist auch $xy \in H$, sowie $x^{-1} \in H$:

· Per Definition ist H der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die e enthalten. Mit anderen Worten ist

$$H = G \setminus \bigcup_{\substack{U \ni e \\ U \text{ offen}}} U \tag{4.3}$$

Angenommen, es gäbe $x, y \in H$ mit $xy \in G \setminus H$.

· Dann existiert eine offene Umgebung W von xy mit $e \notin W$.

· Andererseits ist $m^{-1}(W)$ eine offene Umgebung von $(x, y) \in G \times G$, also existieren

4.1. TOPOLOGISCHE GRUPPEN

offene Umgebungen $U \ni x$ und $V \ni y$ mit $U \times V \subset m^{-1}(W)$, also $UV \subset W$. Da aber e sowohl in U als auch in V enthalten ist (andernfalls wären letztere in $G \setminus H$), folgt aus $e = ee \in UV \subset W$, im Widerspruch zu $e \notin W$.

- Der Beweis, dass H unter Inversenbildung abgeschlossen ist, geht analog.
- H ist eine normale Untergruppe, denn für jedes $x \in G$ ist $xHx^{-1} \ni e$ abgeschlossen, so dass $H \subset xHx^{-1}$ gilt. Da dies aber dann auch mit $x \rightarrow x^{-1}$ wahr ist, folgt

$$H \subset xHx^{-1} \subset x(x^{-1}Hx)x^{-1} = H \quad (4.4)$$

also $xHx^{-1} = H$.

- Damit ist also G/H eine Gruppe, und man prüfe also Übung, dass die Gruppenstruktur mit der Quotiententopologie ($U \subset G/H = \pi(G)$ ist offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in G) verträglich ist, dass also G/H eine topologische Gruppe ist.

· Um zu zeigen, dass G/H T_1 ist, genügt es zu zeigen, dass $[e] = eH = H \in G/H$ in der Quotiententopologie abgeschlossen ist. Dies folgt aber aus der Tatsache, dass $G = H \cup (\text{übrige Nebenklassen})$, dass also $\pi^{-1}(G/H \setminus [e]) = G \setminus H$, was per Definition offen in G ist. OEΔ

Der Beweis gibt einen kleinen Eindruck davon, wie man, z.B. im Zusammenhang von Hilberts fünftem Problem, "Pathologien" aus der topologischen Struktur ausdividieren kann. Wir zeigen nun noch eine Konsequenz aus der Kompaktheit einer topologischen Gruppe, welche für die Existenz und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes von Bedeutung ist.

Proposition 4.4. *Sei G eine kompakte topologische Gruppe und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig in dem Sinne, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine (symmetrische) Umgebung $V \ni e$ ($V = V^{-1}$) existiert, so dass*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in G \text{ mit } x^{-1}y \in V \text{ oder } yx^{-1} \in V \quad (4.5)$$

Beweis. Die Äquivalenz der Aussage zu

$$|f(xz) - f(x)| < \epsilon \text{ und } |f(zx) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in G, z \in V \quad (4.6)$$

stellt die Analogie zur gleichmäßigen Stetigkeit von Funktionen auf der reellen Achse vielleicht noch etwas besser heraus.

- Betrachte zum Beweis dieser Aussage die Funktion

$$F : G \times G \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(x, z) = f(xz) - f(x) \quad (4.7)$$

Diese Funktion ist als Verkettung stetiger Abbildungen stetig mit $F(x, e) = 0$ für jedes $x \in G$. Daher gibt es für jedes $x \in G$ Umgebungen $U_x \ni x$, $V_x \ni e$, so dass

$$|F(x', z)| < \epsilon, \quad \forall (x', z) \in U_x \times V_x \quad (4.8)$$

- Da $\cup_{x \in G} U_x = G$ und G kompakt ist, existieren endlich viele $(x_i)_{i=1, \dots, N}$ so dass $G = \cup_{i=1}^N U_{x_i}$. Setzt man dann $V = \cap V_{x_i} \ni e$ so ist für jedes $x' \in G$ und $z \in V$, $x' \in U_{x_i}$ für ein i und $z \in V_{x_i}$, also

$$|F(x', z)| = |f(x'z) - f(x')| < \epsilon \quad (4.9)$$

(Die Stetigkeit links kann entweder im Anschluss durch eine analoge Argumentation sichergestellt werden, oder direkt durch Betrachten von $|f(xz) - f(x)| + |f(zx) - f(x)|$ an Stelle von F .) OEΔ

Wie bereits angedeutet sind vom Standpunkt dieser Vorlesung die kompakten topologischen Gruppen die natürliche nächste Klasse von Gruppen, deren Darstellungstheorie (fast) genauso komplett behandelt werden kann, wie diejenige der endlichen Gruppen. Insbesondere begründet der Satz von Peter-Weyl, der die vollständige Zerlegung des Raums der bezüglich dem Haarschen Maß quadrat-integrierbaren Funktionen in irreduzible Darstellungen beschreibt, die Einschränkung auf endlich-dimensionale und unitäre Darstellungen der komplexen Lie-Algebren.

Um uns aber den für die Differentialgeometrie, die Physik und die allgemeine Anschauung wichtigen Beispielen schneller zu nähern, stellen wir an dieser Stelle die detaillierte Entwicklung der zugehörigen Analysis zurück, und fassen die wichtigsten Ergebnisse gegebenenfalls später zusammen.

§ 4.2 Von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Die folgende Definition kennen wir bereits aus Kapitel 1:

Definition 4.5. Eine Lie-Gruppe ist eine mit einer kompatiblen differenzierbaren Struktur versehene topologische Gruppe, derart dass die Gruppenoperationen m und ι differenzierbare Abbildungen sind.

Bemerkungen. · Bekanntermaßen kann man beim Begriff der Differenzierbarkeit Unterscheidungen treffen im Grad und dem Definitionsbereich (\mathbb{R} oder \mathbb{C}). Es stellt sich heraus, dass die Annahme einer verträglichen Gruppenstruktur den Grad der Differenzierbarkeit irrelevant macht, in dem Sinne dass C^1 bereits C^∞ und sogar “reell analytisch” impliziert. (Es ist sogar so, dass schon die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit Differenzierbarkeit impliziert, und allgemein topologische Gruppen, welche nicht Lie-Gruppen sind, vom analytischen Standpunkt etwas “pathologisch” sind.²)

· Die Unterscheidung zwischen reell und komplex differenzierbar ist hingegen wichtig und für die Klassifikation und Darstellungstheorie eigentlich von zentraler Bedeutung. Für den Zugang über kompakte Gruppen genügen aber reelle Mannigfaltigkeiten.

· Die wesentlichen Beispiele von Lie-Gruppen sind reelle und komplexe Matrix-Gruppen, welche wir als Beispiele im Abschnitt §4.3 besprechen, und für deren Untersuchung man mit gewöhnlicher Differentialrechnung im \mathbb{R}^n auskäme. Wir wollen aber den Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren allgemein behandeln und schieben daher an dieser Stelle eine Erinnerung an das allgemeine Differentialkalkül auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ein.³

4.2.1 Der Tangentialraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit

Erinnerung. · Eine differenzierbare⁴ Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist ein (hausdorffscher, zweitabzählbarer) topologischer Raum M , welcher mit einer (ver-

²Für die genaue Formulierungen siehe etwa Terence Tao, “Hilbert’s Fifth Problem and Related Topics”, GSM 153, AMS 2014

³Siehe etwa Frank W. Warner, “Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups”, GTM 94, Springer 1983

⁴Für uns synonym zu “glatt”.

4.2. VON LIE-GRUPPEN UND LIE-ALGEBREN

träglichen) differenzierbaren Struktur ausgestattet ist, d.h. einer Äquivalenzklasse von Atlanten—Systeme $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ von offenen Mengen U_α mit $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ und stetigen Karten-Abbildungen $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche Homöomorphismen auf ihr Bild sind, derart dass $\forall \alpha, \beta \in A$ die Kartenwechsel

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (4.10)$$

differenzierbare Abbildungen (von offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n) sind.

· Wesentliche Beispiele sind Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n , welche nach dem Satz über die Umkehrabbildung lokal äquivalent als Verschwindungsort oder als Graphen glatter Funktionen von vollem Rang dargestellt werden können.

· Die Idee der Differentialrechnung ist die Approximation glatter Funktionen durch lineare Algebra. Seit Isaac Newton spielt sich für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, und einen Punkt $p \in U$ diese lineare Algebra im umgebenden Vektorraum \mathbb{R}^n ab, welchen wir uns als “an p angeheftet” vorstellen und als den Tangentialraum an U in p bezeichnen: $T_p U \cong \mathbb{R}^n$.

· Da diese Definition erstens lokaler Natur ist, zweitens bis auf kanonischen Isomorphismus kanonisch nur von der Diffeomorphismenklasse von U abhängt, und drittens der abstrakte Begriff der “differenzierbaren Mannigfaltigkeiten” gerade so gestrickt ist, dass diese “lokal diffeomorph” zu offenen Mengen in \mathbb{R}^n sind, definiert man dann allgemein für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M und $p \in M$ den Tangentialraum zu M in p als

$$T_p M := T_{\varphi(p)} \varphi(U) \cong \mathbb{R}^n \quad (4.11)$$

für eine beliebige Karte (U, φ) um p .

· Es hat sich der Zweckmässigkeit wegen eingebürgert, bei gewissen differentialgeometrischen Argumenten dem algebraischen Standpunkt den Vorzug zu geben, in dem die Algebra

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist glatt für jedes } \alpha \in A\} \quad (4.12)$$

der glatten Funktionen auf M die erste Stelle einnimmt. Man erspart sich dadurch das “Rechnen in Karten”. Von diesem Standpunkt her lässt sich $T_p M$ identifizieren als der Vektorraum der Derivationen von $\mathcal{F}(M)$ in p ,

$$T_p M = \text{Der}_p(\mathcal{F}(M)) = \{v \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(M), \mathbb{R}), v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)\} \quad (4.13)$$

· Die zur ursprünglichen Definition (4.11) gehörige Basis von $T_p M$ sind die partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{i=1, \dots, n} \quad (4.14)$$

nach den Koordinatenfunktionen $x^i(p') = \varphi^i(p')$, welche für p' in einer Umgebung von p definiert sind.

· Einzelne Tangentialvektoren $\dot{\gamma}(0) \in T_p M$ können auch über glatte Kurven durch p

$$\gamma : (-1, 1) \rightarrow M, \quad \gamma(0) = p \quad (4.15)$$

angesteuert werden:

$$\dot{\gamma}(0)(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma \quad (4.16)$$

Diese Definition ist anschaulich und auch für Lie-Gruppen nützlich, mit dem verkraftbaren Nachteil, dass sie nicht offensichtlich einen Vektorraum liefert.

· Ein glattes Vektorfeld X ist das Datum eines Tangentialvektors $X_p \in T_p M$ für jedes $p \in M$ derart dass für jedes $f \in \mathcal{F}(M)$ die Funktion $M \ni p \mapsto X(f)(p) = X_p(f)$ glatt ist. Der Raum der glatten Vektorfelder auf M ist

$$\mathfrak{X}(M) = \text{Der}(\mathcal{F}(M)) \quad (4.17)$$

Fakt 4.6. Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist der Kommutator $X \circ Y - Y \circ X$ wieder eine Derivation von $\mathcal{F}(M)$ (Nachrechnen!). Die Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto [X, Y] \quad (4.18)$$

ist anti-symmetrisch, bilinear und erfüllt die Jacobi-Identität (siehe unten), und macht $\mathfrak{X}(M)$ zu einer Lie-Algebra (Definition siehe unten).

4.2.2 Das Differential einer glatten Abbildung

Seien nun M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Für $p \in M$ ist die *Ableitung* von F in p definiert als die lineare Abbildung

$$(DF)_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N, \quad (DF)_p(v)(g) := v(g \circ F) \text{ für } v \in T_p M, g \in \mathcal{F}(N) \quad (4.19)$$

Fakt 4.7. Eigenschaften der Ableitung:

- (i) $D(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_p M}$
- (ii) $D(\text{konstante Abbildung}) = 0$
- (iii) $D(\text{lineare Abbildung}) =$ die lineare Abbildung selbst (Hier benutzt man die oben gemachte Bemerkung, dass der Tangentialraum eines Vektorraums kanonisch mit dem Vektorraum selbst identifiziert ist.)
- (iv) Falls $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} O$ so gilt die *Kettenregel*

$$D(G \circ F)_p = (DG)_{F(p)} \circ (DF)_p : T_p M \rightarrow T_{G(F(p))} O \quad (4.20)$$

- (v) Für eine Produktmannigfaltigkeit $M = M_1 \times M_2$ ist der Tangentialraum in $p = (p_1, p_2) \in M$ in natürlicher Weise

$$T_p M = T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2 \quad (4.21)$$

Mit dieser Zerlegung gilt für $F = F_1 \times F_2 : M \rightarrow N$, $q \in N$

$$(DF)_q = (DF_1)_q \oplus (DF_2)_q \quad (4.22)$$

(Denke: Spaltenblockmatrizen)

- (vi) Definieren wir “umgekehrt” für $F : M_1 \times M_2 \rightarrow N$ und $p_{1,2} \in M_{1,2}$ die glatten Abbildungen

$$\begin{aligned} F_{p_1} : M_2 &\rightarrow N, & F_{p_1}(p_2) &= F(p_1, p_2) \\ F_{p_2} : M_1 &\rightarrow N, & F_{p_2}(p_1) &= F(p_1, p_2) \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.2. VON LIE-GRUPPEN UND LIE-ALGEBREN

so gilt die ‘‘Produktregel’’

$$(DF)_p = (DF_{p_2})_{p_1} + (DF_{p_1})_{p_2} \quad (4.24)$$

(Denke: Partielle Ableitungen, Zeilenblockmatrizen)

Unsere erste Anwendung dieses Kalküls auf Lie-Gruppen ist das abstrakte Nachrechnen einer aus der linearen Algebra bekannten Formel für die Ableitung der Inversen einer Matrix (‘‘ $DA^{-1} = -A^{-1} \cdot A^{-1}$ ’’).

Beispiel 4.8. Sei G eine Lie-Gruppe. Das Festhalten des einen oder anderen Arguments der Multiplikation $m : G \times G \rightarrow G$ ergibt die Links- bzw. Rechtstranslationen, L_g und R_h auf G . Nach der Produktregel gilt dann für $g, h \in G$, $x \in T_p G$, $y \in T_h G$,

$$(Dm)_{g,h}(x, y) = (DL_g)_h(y) + (DR_h)_g(x) \in T_{gh}G \quad (4.25)$$

Durch Verkettung mit $\iota : G \rightarrow G$ erhalten wir wegen $m(g, \iota(g)) = e = \text{konst.}$ für $x \in T_g G$ die Gleichung

$$0 = (DL_g)_{\iota(g)} \circ (D\iota)_g(x) + (DR_{\iota(g)})_g(x) \in T_e G \quad (4.26)$$

was ausgewertet bei $g = e$ zu $(D\iota)_e(x) + x = 0$ führt, d.h.

$$(D\iota)_e = -\text{id}_{T_e G} \quad (4.27)$$

4.2.3 Lie-Algebren

Definition 4.9. Eine *Lie-Algebra* ist ein Vektorraum⁵ \mathfrak{g} zusammen mit einer antisymmetrischen bilinearen Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, welche die Jacobi-Identität erfüllt:

$$\begin{aligned} [x, y] &= -[y, x], & \forall x, y \in \mathfrak{g} \text{ (Anti-Symmetrie)} \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0, & \forall x, y, z \in \mathfrak{g} \text{ (Jacobi-Identität)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

- Eine Lie-Algebra heisst *abelsch*, falls $[\cdot, \cdot] \equiv 0$
- Eine Derivation einer Lie-Algebra ist eine lineare Abbildung $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit

$$\delta[x, y] = [\delta x, y] + [x, \delta y] \quad (4.29)$$

Für einen Vektorraum V wird der Vektorraum $\text{End}(V)$ der linearen Endomorphismen von V ausgerüstet mit dem Kommutator

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x, \quad x, y \in \text{End}(V) \quad (4.30)$$

zu einer Lie-Algebra, welche weiterhin mit $\text{End}(V)$ bezeichnet wird.

Definition 4.10. Eine Darstellung einer Lie-Algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Lie-Algebra Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$.

⁵Zur Erinnerung sind unsere Vektorräume stets reell oder komplex.

Für eine Lie-Algebra \mathfrak{g} und $x \in \mathfrak{g}$ bezeichne nun $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ die lineare Abbildung

$$\text{ad}_x = [x, y] \quad (4.31)$$

Dann ist die Jacobi-Identität “äquivalent” zu jeder der Aussagen:

- (i) $\forall x \in \mathfrak{g}$ ist ad_x eine Derivation von \mathfrak{g} .
- (ii) Die Abbildung $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \text{ad}_x$ ist eine Darstellung von \mathfrak{g} auf dem sich selbst zugrundeliegenden Vektorraum (die adjungierte Darstellung).
- Die Lie-Algebra $\mathfrak{X}(M)$ der glatten Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist ein weiteres Beispiel dafür, dass der Vektorraum der Derivationen einer assoziativen Algebra (im Beispiel $\mathcal{F}(M)$, muss aber nicht kommutativ sein) in natürlicher Weise eine Lie-Algebra ist.

4.2.4 Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

Zurück zum Thema wollen wir nun zu jeder Lie-Gruppe G eine Lie-Algebra assoziieren, welche die infinitesimale Struktur von G erfasst und in einer genau zu beschreibenden Weise “ G erzeugt”.

- Der zugrundeliegende Vektorraum ist einfach

$$\mathfrak{g} = T_e G \quad (4.32)$$

Die Klammer kann auf zwei verschiedene Weisen erklärt werden, von welchen die zweite (siehe § 5.2) die Idee der infinitesimalen Struktur herausstellt, aber technisch etwas aufwendiger ist. Fürs Erste benutzen wir die Lie-Algebra-Struktur auf dem Raum der Vektorfelder $\mathfrak{X}(G)$.

- Betrachte für $x \in \mathfrak{g} = T_e G$ das Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$, definiert durch

$$X_g = (DL_g)_e(x), \quad g \in G \quad (4.33)$$

wobei L_g die Linkstranslation ist und $(DL_g)_e$ deren Ableitung am neutralen Element.

- Wegen der Kettenregel $(DL_g)_h(DL_h)_e = (DL_{L_g(h)})_e$ ist X *links-invariant* in dem Sinne dass

$$(DL_g)_h X_h = X_{gh} \quad (4.34)$$

Lemma/Definition 4.11. Sei $\mathfrak{X}^L(G)$ der Vektorraum der links-invarianten Vektorfelder auf G .

- (i) Es existiert ein natürlicher Vektorraum-Isomorphismus

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{X}^L(G) \quad (4.35)$$

welchen wir (wenn möglich) durch Groß- und Kleinschreibung notieren.

- (ii) $\mathfrak{X}^L(G)$ ist eine Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{X}(G)$ und für $x, y \in \mathfrak{g}$ setzen wir

$$[x, y] = [X, Y]_e \quad (4.36)$$

wo auf der rechten Seite $[X, Y]$ die Lie-Klammer von Vektorfeldern ist und $_e$ die Auswertung am neutralen Element.

4.3. BEISPIELE—DIE KLASSISCHEN GRUPPEN

Beweis. (i) ist klar durch Auswerten am neutralen Element: $x \mapsto X \mapsto X_e = x$.

(ii) wird einfach, wenn wir die Linksinvarianz zunächst folgendermassen umschreiben: Sei für $g \in G$, $L_g^* : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G)$ das Zurückziehen von Funktionen⁶

$$L_g^*(f)(h) := f(L_g h) = f(gh), \quad f \in \mathcal{F}(G), h \in G \quad (4.37)$$

L_g^* ist ein Algebra-Homomorphismus, und es gilt

$$(DL_g)_h X_h(f) = X_h(f(gh)) = X_h(L_g^*(f)) = (X \circ L_g^*)(f)(h) \quad (4.38)$$

als Verkettung mit der Derivation X . Andererseits ist

$$X_{gh}(f) = X(f)(gh) = (L_g^* \circ X)(f)(h) \quad (4.39)$$

sodass Linksinvarianz (4.34) äquivalent ist zur Identität der \mathbb{R} -linearen Abbildungen $X \circ L_g^* = L_g^* \circ X$. Dann aber folgt die Linksinvarianz von $[X, Y]$ aus der von $X, Y \in \mathfrak{X}^L(G)$ durch direktes Nachrechnen. OEΔ

Bemerkungen. Natürlich hätten wir anstatt der linksinvarianten Vektorfelder auch die rechtsinvarianten benutzen können: Sei für $x \in \mathfrak{g} = T_e G$ \tilde{X} das rechtsinvariante Vektorfeld

$$\tilde{X}_g = (DR_g)_e(x) \quad (4.40)$$

Beh.: Die zugehörige Klammer

$$[\tilde{x}, \tilde{y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e \quad (4.41)$$

erfüllt $[\tilde{\cdot}, \tilde{\cdot}] = -[\cdot, \cdot]$.

Bew.: Der Schlüssel ist $\iota \circ L_g = R_{g^{-1}} \circ \iota$, gemäßdem

$$(D\iota)_g (DL_g)_e(x) = (DR_{g^{-1}})_e \underbrace{(D\iota)_e x}_{= -x, \text{ s. (4.27)}} \quad (4.42)$$

$$\text{also:} \quad (D\iota)_g X_g = -\tilde{X}_{g^{-1}}$$

$$\text{oder auch:} \quad X \circ \iota^* = -\iota^* \circ \tilde{X}$$

Daher ist (beachte $(\iota^*)^2 = \text{id}$)

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}] &= [-\iota^* \circ X \circ \iota^*, -\iota^* \circ Y \circ \iota^*] \\ &= \iota^* \circ [X, Y] \circ \iota^* \\ &= -\tilde{Z} \end{aligned} \quad (4.43)$$

wo \tilde{Z} das zu $z = [x, y]$ gehörige *rechtsinvariante* Vektorfeld ist. Auswerten bei e ergibt dann die Behauptung.

§ 4.3 Beispiele—Die klassischen Gruppen

Es ist allerhöchste Zeit, dass wir den Beispielen Rechnung tragen, die die ganze Theorie der Lie-Gruppen nicht nur historisch begründet haben und auch noch heutzutage motivieren, sondern sie in gewissem Sinne sogar (fast) erschöpfen.

⁶Nicht zu verwechseln mit der regulären Darstellung $L_g(f)(h) = f(g^{-1}h)$!!!

4.3.1 Die allgemein lineare Gruppe

Das prototypische Beispiel einer Lie-Gruppe ist die allgemein lineare Gruppe der invertierbaren Endomorphismen eines endlich-dimensionalen (reellen oder komplexen) Vektorraums, z.B.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n\} \subset \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \quad (4.44)$$

Begr.: $GL(n, \mathbb{R}) = \{\det(g) \neq 0\}$ ist durch eine Ungleichung auf eine stetige Funktion definiert, und damit eine offene Teilmenge eines Vektorraums, also eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Gruppenoperationen sind polynomial oder (für die Inversion) rational in den Einträgen, und daher differenzierbar.

· $GL(n, \mathbb{C})$ ist eine komplexe Lie-Gruppe, d.h. die Gruppenoperationen sind holomorph. Die Möglichkeit dieser Körper-Substitution wird im Folgenden nicht jedesmal wiederholt. (Strenggenommen müssten die differentialgeometrischen Betrachtungen aus § 4.2 auch etwas angepasst werden.)

Wie in jedem Vektorraum ist der Tangentialraum zu $g \in GL(n, \mathbb{R})$ gerade der Vektorraum selbst. Insbesondere ist die Lie-Algebra von $GL(n, \mathbb{R})$ (zunächst als Vektorraum)

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}(n, \mathbb{R}) = \text{End}(\mathbb{R}^n) \quad (4.45)$$

Für $g \in GL(n, \mathbb{R})$ lässt sich die Linkstranslation L_g zu einem linearen Automorphismus des umgebenden Vektorraums fortsetzen und fällt daher mit seiner Ableitung zusammen (siehe Fakt (iii) auf Seite 38). Also ist für $x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ das zugehörige linksinvariante Vektorfeld gegeben durch

$$X_g = (DL_g)_e(x) = gx \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong T_g GL(n, \mathbb{R}) \quad (4.46)$$

Zum Auswerten der Definition der Lie-Klammer (4.36) benötigen wir die Identifikation von Tangentialvektoren mit Richtungsableitungen gemäss (4.14). Geeignete lineare Koordinaten sind z.B. die Koeffizienten a^{ij} von $g = a^{ij}(g)e_{ij}$ bezüglich der Standardbasis e_{ij} von $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$. $gx = (gx)^{ij}e_{ij}$ entspricht damit der Ableitung

$$(gx)^{ij} \frac{\partial}{\partial a^{ij}} \quad (4.47)$$

und der Kommutator wird

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[(gx)^{ij} \frac{\partial}{\partial a^{ij}}, (gy)^{kl} \frac{\partial}{\partial a^{kl}} \right] \\ &= (gxy)^{kl} \frac{\partial}{\partial a^{kl}} - (gyx)^{ij} \frac{\partial}{\partial a^{ij}} \end{aligned} \quad (4.48)$$

(Der Punkt ist, dass a^{ij} in g , aber nicht in y (bzw. x) vorkommt, und die Ableitung gerade den entsprechenden Matrixeintrag durch $(gx)^{ij}$ (bzw. $(gy)^{kl}$) ersetzt.) Durch Invertieren der Isomorphismen lernen wir, dass die Lie-Klammer gerade der Matrix-Kommutator (4.30) ist, der Isomorphismus (4.45) also auch auf dem Niveau der Lie-Algebren gilt.

4.3. BEISPIELE—DIE KLASSISCHEN GRUPPEN

4.3.2 Matrix-Lie-Gruppen

Es ist wahr, wenn auch nicht ganz leicht zu zeigen, dass die “meisten” Lie-Gruppen als Untergruppen der allgemein linearen Gruppe auftreten, wobei man den Begriff der Untergruppe sogar noch etwas abschwächen und einschränken kann:

Definition 4.12. Eine *Matrix-Lie-Gruppe* ist eine topologisch abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ oder $GL(n, \mathbb{C})$ für irgendein n .

Beispiel 4.13. Die speziell lineare Gruppe

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}), \det g = 1\} \quad (4.49)$$

ist wegen der Multiplikativität der Determinante eine Untergruppe, und wegen der Stetigkeit abgeschlossen (d.h. falls $(g_n)_n$ eine Folge in $SL(n, \mathbb{R})$ ist, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g \in GL(n, \mathbb{R})$, so ist bereits $g \in SL(n, \mathbb{R})$).

Beh.: $SL(n, \mathbb{R})$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $GL(n, \mathbb{R})$, d.h. eine Unter-Lie-Gruppe.

Bew.: Zur Benutzung des Satzes über die Umkehrabbildung müssen wir zeigen, dass die Ableitung der Determinante nicht entartet. Sei also $g \in GL(n, \mathbb{R})$ und $x \in T_g GL(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}(n, \mathbb{R})$. Wir berechnen $(D \det)_g(x) \in T_{\det g} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ über die glatte Kurve $t \mapsto g + tx$ durch g , s. (4.16):

$$\begin{aligned} (D \det)_g(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(g + tx) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det g \det(\text{id} + tg^{-1}x) \\ &= \det g \operatorname{tr}(g^{-1}x) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Die lineare Abbildung $x \mapsto \det g \operatorname{tr}(g^{-1}x)$ ist offensichtlich nicht 0, hat also konstanten maximalen Rang 1.

· Durch Auswerten bei $g = e$ erhalten wir noch die Lie-Algebra von $SL(n, \mathbb{R})$ als

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{x \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}), \operatorname{tr} x = 0\} \quad (4.51)$$

Es sollte hervorgehoben werden, dass in der Definition von Matrix-Lie-Gruppen keine Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird. Tatsächlich ist nach einem Satz von E. Cartan jede topologisch abgeschlossene Untergruppe einer allgemeinen Lie-Gruppe automatisch differenzierbar und eine regulär eingebettete Untermannigfaltigkeit.⁷ Die Obstruktion gegen eine Matrix-Realisierung von Lie-Gruppen liegt im Großen. So ist z.B. die universelle Überlagerung von $SL(2, \mathbb{R})$ (mit Fundamentalgruppe \mathbb{Z}) nicht mehr Untergruppe einer allgemein linearen Gruppe.

· Zur Gegen-Illustration der Abgeschlossenheitsvoraussetzung betrachten wir für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Gruppe

$$T_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(2, \mathbb{C}) \quad (4.52)$$

⁷Dies wäre dann korrekterweise das Konzept einer “Unter-Lie-Gruppe”, während bei einer “Lie-Untergruppe” die induzierte Topologie nicht mit der intrinsischen übereinstimmen muss. Es besteht aber wohl keine Einigkeit bei dieser Terminologie.

Beh.: T_α ist nicht abgeschlossen (in $GL(2, \mathbb{C})$): Die Folge

$$\begin{pmatrix} e^{i(2n+1)\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha(2n+1)\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha(2n+1)\pi} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

hat eine gegen $-id$ konvergente Unterfolge. (Wie aus der Analysis bekannt, ist jedes $x \in [0, 2)$ Häufungspunkt der Folge $\alpha(2n + 1) \bmod 2$.) $-id$ ist aber selbst nicht in T_α .

· Als abstrakte Gruppe hingegen ist natürlich $T_\alpha = (\mathbb{R}, +)$ die additive Gruppe, welche sich durchaus als Matrix-Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(2, \mathbb{R}), \quad (4.54)$$

realisieren lässt und damit ein Beispiel für allgemeine Gruppen von Dreiecksmatrizen gibt. Diese Klasse enthält z.B. auch

$$B_n = \left\{ \begin{pmatrix} \bullet & * & \cdots & * \\ 0 & \bullet & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \bullet \end{pmatrix}, \bullet \neq 0, * \text{ beliebig} \right\} \quad (4.55)$$

und andere Varianten. (Beachte, dass B_n zwar in $GL(n, \mathbb{R})$ abgeschlossen ist, aber nicht in $Mat(n, \mathbb{R})$.)

4.3.3 Klassische Gruppen

Als geometrisch Interessierte bemerken wir nun, dass man $SL(n, \mathbb{R})$ interpretieren kann als die Untergruppe der volumenerhaltenden linearen Transformationen des \mathbb{R}^n : Mit Standardkoordinaten (x^i) auf \mathbb{R}^n ist die Volumen- oder Topform

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \wedge^n(\mathbb{R}^n)^* \quad (4.56)$$

invariant unter der Substitution $x^i \rightarrow g^i_j x^j$ iff $\det g = 1$.

Dreiecksmatrizen wie (4.55) lassen sich interpretieren als Automorphismen gewisser linearer Strukturen. So lässt z.B. die Gruppe in (4.54) den von $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraum von \mathbb{R}^2 invariant, und erhält damit die *Linearform*⁸

$$e_2^* = (0 \ 1) \in (\mathbb{R}^2)^* \quad (4.57)$$

· In ähnlicher Weise lässt die Gruppe B_n die vollständige Fahne

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots \cdots \subset V_n \quad (4.58)$$

von \mathbb{R}^n invariant. ($V_i = \text{Span}(e_1, \dots, e_i)$.)

⁸Ausserdem wirkt sie trivial auf dem Quotienten $\mathbb{R}^2/e_1\mathbb{R}$. Hier liegt also schon eine Mischung mit (4.56) vor.

4.3. BEISPIELE—DIE KLASSISCHEN GRUPPEN

Mit einem Sinn für Systematik erinnern wir uns nun an die Invarianzgruppen *bilinear*er Strukturen. Sei $V \cong \mathbb{R}^n$ und $Q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine (gar nicht notwendigerweise nicht-entartete) *Bilinearform*, d.h.

$$Q \in V^* \otimes V^* \quad (4.59)$$

Dann ist die Gruppe

$$G(Q) = \{g \in GL(V), Q(gv, gw) = Q(v, w) \forall v, w \in V\} \quad (4.60)$$

aus ähnlichen Gründen wie oben eine Matrix-Lie-Gruppe. Die Glattheit lässt sich auch wieder direkt verifizieren, indem man $G(Q)$ identifiziert als Verschwindungslokus einer Abbildung $F(g) = Q(g \cdot, g \cdot) - Q(\cdot, \cdot)$ von $GL(V)$ nach $V^* \otimes V^*$ mit der Ableitung

$$(DF)_g(x) = Q(g \cdot, x \cdot) + Q(x \cdot, g \cdot) \quad (4.61)$$

Da $x \mapsto gx$ den Kern von $(DF)_e$ isomorph auf den von $(DF)_g$ abbildet, hat dann DF konstanten Rang und $F^{-1}(0)$ ist glatt. Insbesondere ist bei $g = e$

$$\mathfrak{g}(Q) = T_e G(Q) = \{x \in \text{End}(V), Q(xv, w) + Q(v, xw) = 0 \forall v, w \in V\} \quad (4.62)$$

als Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{gl}(V)$: Für $x, y \in \mathfrak{g}(Q)$ ist

$$\begin{aligned} Q([x, y]v, w) &= Q(xyv, w) - Q(yxv, w) = -Q(yv, xw) + Q(xv, yw) \\ &= Q(v, yxw) - Q(v, xyw) = -Q(v, [x, y]w) \end{aligned} \quad (4.63)$$

also auch $[x, y] \in \mathfrak{g}(Q)$.

· Ist nach Wahl einer Basis M die Matrix-Darstellung von Q , so lauten die Bedingungen $g^T M g = M$ bzw. $x^T M + M x = 0$.

Wir nehmen nun an, dass Q nicht-entartet ist, und unterscheiden zwei Fälle.

(1) Q symmetrisch. Die resultierenden “orthogonalen Gruppen” zerfallen nach den Resultaten über Normalformen in Isomorphismenklassen nach der Signatur von Q —der Anzahl k positiver und $n - k$ negativer Eigenwerte von M . Sie werden mit $O(k, n - k, \mathbb{R})$ bezeichnet.⁹ Ersetzen wir \mathbb{R} durch \mathbb{C} , so verschwindet diese Unterscheidung. Jedenfalls ist noch interessant, dass die orthogonalen Gruppen nicht zusammenhängend sind: Das Quadrat der Determinante ist stets 1, und die Untergruppe mit Determinante 1 wird mit SO bezeichnet. ($SO(k, n - k, \mathbb{R})$ hat für $0 < k < n$ zwei Komponenten, alle anderen sind zusammenhängend.)

(2) Q anti-symmetrisch. Hier sind alle “symplektischen Gruppen” isomorph, da keine Signatur zu unterscheiden ist. Hingegen muss für die Nichtentartung von Q n gerade sein. Man ersetzt dann $n \rightarrow 2n$ und schreibt $Sp(2n, \mathbb{R})$ bzw. $Sp(2n, \mathbb{C})$. Wegen der Eigenschaft der Pfaffschen Determinante¹⁰ einer anti-symmetrischen Matrix

$$\text{Pfaff}(g^T M g) = \det g \text{Pfaff}(M) \quad (4.65)$$

⁹Manchmal wird “orthogonal” für den Fall $O(n, 0, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R})$ reserviert. Ausserdem gilt natürlich $O(k, n - k, \mathbb{R}) \cong O(n - k, k, \mathbb{R})$.

¹⁰Diese ist gegeben durch

$$\text{Pfaff}(M) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{2n} M_{\sigma_{2i-1} \sigma_{2i}} \quad (4.64)$$

ist hingegen die Determinante von g stets 1, und $Sp(2n, \mathbb{R})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$ sind zusammenhängend (dies muss bewiesen werden!).

- Es ist dem Leser überlassen, die Lie-Algebren dieser “klassischen Gruppen” explizit zu beschreiben (oder nachzuschauen) und beispielweise wenigstens ihre Dimension anzugeben.
- Weiterhin ist es Wert sich zu überlegen, dass das Fallenlassen der Nicht-Entartung und/oder der Symmetrie von Q zu Mischformen der obigen Konstruktionen führt.
- Ein wesentliches Resultat der Klassifikation der einfachen Lie-Algebren über \mathbb{C} wird sein, dass sich alle erdenkliche Lie-Gruppen durch “einfache” algebraische und topologische Modifikationen zusammensetzen lassen, falls man zu den klassischen Beispielen noch fünf “exzeptionelle” Fälle als Bausteine hinzufügt (siehe § 7.4). Insbesondere gibt es “zwischen” den quadratischen (4.59) und den Top- (4.56) nur ganz wenige Formen anderen Grads, die zu neuen Lie-Gruppen führen. Mehr dazu (hoffentlich) in den Übungen.

4.3.4 Die kompakte Schiene

Vom Standpunkt der Darstellungstheorie ist es hingegen interessant, noch zwischen den Linear- (4.57) und Bilinearformen (4.59) die *Sesquilinearformen* anzuschauen. Die zugehörigen Lie-Gruppen sind reelle Mannigfaltigkeiten, die Vektorräume komplex (oder sogar quaternionisch), und das Ergebnis daher ein gewisser Mischmasch. Wie wir im endlichen (und kompakten) Fall gesehen haben (oder hätten), lassen alle komplexe Darstellungen ein invariantes hermitesches inneres Produkt zu, so dass also das Bild einer Darstellung a priori gar nicht in ganz $GL(n, \mathbb{C})$, sondern in der unitären Gruppe

$$U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}), g^\dagger g = \text{id}_{\mathbb{C}^n}\} \quad (4.66)$$

landet. (Im Unterschied hierzu ist die Existenz orthogonaler oder symplektischer (und auch speziell-linearer) Strukturen eine charakteristische Eigenschaft spezieller Darstellungen.)

- Da Gruppen wie $U(n)$ selbst wieder kompakt sind, lässt sich ihre Darstellungstheorie komplett beschreiben (siehe § 7.5), was unser Interesse noch steigert. Nichtsdestotrotz gibt es aus algebraischer Sicht nichts Neues, wie wir nun zeigen.
- Sei also $V \cong \mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektorraum, und $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ ein hermitesches inneres Produkt, d.h.

$$\begin{aligned} H(\lambda v, \mu w) &= \bar{\lambda} \mu H(v, w), & H(v, w) &= \overline{H(w, v)}, \\ H(v, v) &\geq 0, & H(v, v) = 0 &\Leftrightarrow v = 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

- Da jedes solches H äquivalent ist zum Standardprodukt $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i w_i$, ist die zugehörige Gruppe

$$U(H) = \{g \in GL(V), H(gv, gw) = H(v, w) \forall v, w \in V\} \quad (4.68)$$

stets isomorph zu (4.66). Die folgenden ungeeichten Betrachtungen zahlen sich aber in anderen Zusammenhängen aus.

- Zur genaueren Beschreibung von $U(H)$ wählen wir eine Identifikation $V = \mathbb{C}^n \cong$

4.3. BEISPIELE—DIE KLASSISCHEN GRUPPEN

\mathbb{R}^{2n} . Dadurch wird Multiplikation mit i auf V (als komplexem Vektorraum) zu einer linearen Abbildung J (auf dem reellen Vektorraum) mit $J^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^{2n}}$. Seien nun

$$\begin{aligned} Q &= \text{Re } H, & Q(v, w) &= \frac{1}{2}(H(v, w) + H(w, v)) \\ \Omega &= \text{Im } H, & \Omega(v, w) &= \frac{1}{2i}(H(v, w) - H(w, v)) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Dies sind nun offensichtlich bilineare Abbildungen $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Q ist symmetrisch und Ω anti-symmetrisch. Q ist positiv definit, und Ω lässt sich wegen

$$Q(Jv, w) = \text{Re } H(iv, w) = \text{Re}(-iH(v, w)) = \text{Im } H(v, w) = \Omega(v, w) \quad (4.70)$$

durch H und die “komplexe Struktur” J auf dem zugrundeliegenden reellen Vektorraum ausdrücken. Da J invertierbar ist, ist somit Ω auch nicht-entartet. Ausserdem sind Q und Ω beide invariant unter J , und auch (getrennt!) invariant unter $U(n)$.

· Seien umgekehrt auf einem reellen Vektorraum $V \cong \mathbb{R}^{2n}$ eine symmetrische Q und eine anti-symmetrische quadratische Form Ω gegeben. Falls Q positiv definit ist, so existiert für $v \in V$ genau ein Jv sodass für alle $w \in V$ die Gleichung (4.70) erfüllt ist, die damit eine lineare Abbildung $J : V \rightarrow V$ definiert. Falls dann $J^2 = -\text{id}$, so ist V in natürlicher Weise ein komplexer Vektorraum und $H = Q + i\Omega$ ist ein hermitesches inneres Produkt auf V .¹¹

· Im Standardfall wird Q durch die $2n$ -dimensionale Einheitsmatrix und Ω durch die symplektische Matrix $\begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{\mathbb{R}^n} \\ -\text{id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt. Es folgt

$$U(n) \cong O(2n, \mathbb{R}) \cap Sp(2n, \mathbb{R}) \subset GL(2n, \mathbb{R}) \quad (4.71)$$

· In den Übungen definieren wir die “unitär symplektische Gruppe” $Sp(n)$ über die Invarianz eines hermiteschen inneren Produkts auf quaternionischen Vektorräumen und finden

$$Sp(n) \cong U(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{C}) \subset GL(2n, \mathbb{C}) \quad (4.72)$$

· Die Gruppe $O(n, \mathbb{R})$ ist kompakt da alle Einträge einer orthogonalen Matrix durch 1 beschränkt sind (Satz von Heine-Borel). Wegen (4.71) und (4.72) sind dann auch $U(n)$ und $Sp(n)$ kompakt. Denkt man sich $O(n, \mathbb{R})$ in der gegenwärtigen Systematik als der “innere Produkt”-Fall über \mathbb{R} , so schreibt man es konsequenterweise auch $O(n)$. (Allerdings impliziert ja über \mathbb{R} “sesquilinear” bereits “bilinear”.)

· Die Untergruppe von $U(n)$ mit (komplexer!) Determinante 1 heisst $SU(n)$. Für $Sp(n)$ ist keine solche zusätzliche Bedingung möglich oder nötig (die geeignet definierte “quaternionische” Determinante ist immer 1, und $Sp(n)$ ist einfach).

Zusammenfassung:

Abgesehen von den geometrischen Verbindungen stehen, wie man später noch systematisch sehen kann, die Lie-Algebren der hier eingeführten kompakten Gruppen in einem engen Zusammenhang zu denen der algebraisch definierten Gruppen aus

¹¹Je nach Anwendungsgebiet startet man manchmal auch von J und Q , und deduziert Ω , oder man gibt ein nicht-entartetes Ω vor und sucht J sodass das assoziierte Q positiv definit ist.

dem vorherigen Unterabschnitt 4.3.3: So überrascht es nicht, dass die Komplexifizierung der Lie-Algebra von $SO(n)$ isomorph ist zur Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. Vielleicht etwas weniger offensichtlich ist, dass die Komplexifizierung von $\mathfrak{sp}(n)$ isomorph zu $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ ist. Nicht durch die Notation suggeriert wird der Isomorphismus $\mathfrak{su}(n) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Warnung: Die in diesem § gegebene Übersicht ist in keinster Weise vollständig!

KAPITEL 5

VON LIE-ALGEBREN UND LIE-GRUPPEN

Vorbemerkungen/Zusammenfassung:

(1) Wir haben im § 4.2 die Lie-Algebra \mathfrak{g} einer Lie-Gruppe G definiert über die linksinvarianten Vektorfelder, mit der Ankündigung, dass diese Assoziation die Gruppenstruktur durch “infinitesimale” lineare Algebra ersetzt. Es ist nicht schwer einzusehen, dass diese Assoziation verträglich ist mit einigen natürlichen Operationen aus der Welt der Gruppen.

(2) So führt z.B. jeder Morphismus von Lie-Gruppen, d.h. ein glatter Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \rightarrow H$, durch Differentiation am neutralen Element zu einem Morphismus $\phi = (D\Phi)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ der zugehörigen Lie-Algebren.

Beweis. Seien für $x, y \in \mathfrak{g}$, $\tilde{x} = \phi(x)$, $\tilde{y} = \phi(y) \in \mathfrak{h}$. Wir müssen zeigen, dass

$$[\tilde{x}, \tilde{y}] = \phi([x, y]) \quad (5.1)$$

Sei dazu

$$\tilde{X}_h = (DL_h^H)_f(\tilde{x}) \quad (5.2)$$

das zu \tilde{x} gehörige linksinvariante Vektorfeld auf H (mit offensichtlicher Notation zur Unterscheidung der Translationen auf H und G ; f ist das neutrale Element in H). Nun gilt für $g \in G$ wegen der Homomorphismeigenschaft $\Phi(g)\Phi(g') = \Phi(gg')$ für alle $g' \in G$, d.h.

$$L_{\Phi(g)}^H \circ \Phi = \Phi \circ L_g^G \quad (5.3)$$

Unter Anwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\Phi(g)} &= (DL_{\Phi(g)}^H)_f(D\Phi)_e(x) = (D\Phi)_g(DL_g^G)_e(x) \\ &= (D\Phi)_g X_g \end{aligned} \quad (5.4)$$

was wir als Gleichung der \mathbb{R} -linearen Abbildungen

$$\Phi^* \circ \tilde{X} = X \circ \Phi^* : \mathcal{F}(H) \rightarrow \mathcal{F}(G) \quad (5.5)$$

schreiben können. (Man sagt, X und \tilde{X} seien “ Φ -bezogen” (really?). Beachte, dass zum Unterschied etwa von (4.42) Φ^* im allgemeinen *kein* Isomorphismus ist. Die Gleichung (5.5) kann daher nicht zur Definition oder Berechnung von \tilde{X} verwendet werden.) Daraus folgt für $X, Y \in \mathfrak{X}^L(G)$

$$\Phi^* \circ [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y] \circ \Phi^* \quad (5.6)$$

und wegen $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathfrak{X}^L(H)$ folgt für $g \in G$

$$(DL_{\Phi(g)}^H)_f([\tilde{x}, \tilde{y}]) = (D\Phi)_g(DL_g^G)_e([x, y]) \quad (5.7)$$

also für $g = e$ genau (5.1). OEΔ

Insbesondere gilt diese Aussage für eine (glatte!) Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ der Lie-Gruppe, d.h. $D\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ ist eine Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra. Man beachte, dass die Kombination mit unseren Tensor-Operationen auf Darstellungen die Form

$$\begin{aligned} D(\rho_1 \oplus \rho_2) &= D\rho_1 \oplus D\rho_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_1 \oplus V_2) \\ D(\rho_1 \otimes \rho_2) &= D\rho_1 \otimes \text{id} + \text{id} \otimes D\rho_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_1 \otimes V_2) \\ D(\rho^*) &= -(D\rho)^* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V^*) \end{aligned} \quad (5.8)$$

annimmt, und prüfe, dass die resultierenden Regeln auf der rechten Seite aus Darstellungen von \mathfrak{g} wieder Darstellungen machen.

(3) Andererseits haben wir am Beispiel (4.52) auch schon gesehen, dass nicht alle algebraischen Konzepte mit der gesamten kontinuierlichen/differenzierbaren Struktur verträglich sind: Eine glatte Injektion induziert unter Umständen eine feinere Topologie auf ihrem Bild als die umgebende Zielgruppe.

Das Ziel dieses Kapitels ist den Sinn zu präzisieren, in welchem die Lie-Algebren die Lie-Gruppen erfassen. Von besonderem Interesse für die Darstellungstheorie ist dabei der Punkt (2).

(2') Denn während für eine kompakte Gruppe die vollständige Zerlegbarkeit der regulären Darstellung darüber Auskunft gibt, wo alle "vernünftigen" Darstellungen der Gruppe zu finden sind, so ist die explizite Beschreibung dieser Darstellungen am einfachsten über die Lie-Algebra. Im allgemeinen ist es zwar *nicht* richtig, dass jede (selbst endlich-dimensionale und unitäre) Darstellung der Lie-Algebra die Ableitung einer Darstellung der Lie-Gruppe ist. Die Umkehrung von (2), dass für gegebenes H jeder Morphismus von Lie-Algebren $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ von einem Morphismus von Lie-Gruppen $G \rightarrow H$ stammt, gilt nämlich im allgemeinen nur unter der Voraussetzung, dass G als topologischer Raum *einfach zusammenhängend* ist, d.h. unter einer Einschränkung an die globale Topologie von G . (Diese Aussage geht auf das sogenannte "zweite Theorem von Sophus Lie" zurück.) Die Theorie der Überlagerungsräume erlaubt aber dann eine präzise Charakterisierung der Darstellungen von \mathfrak{g} , welche sich zu Darstellungen von G "integrieren" lassen.

(3') Arbeitet man hingegen innerhalb einer fest vorgegebenen Gruppe G , so lässt sich tatsächlich jede Unter-Lie-Algebra von \mathfrak{g} in eindeutiger Weise zu einer Untergruppe integrieren, allerdings ist das Ergebnis, wie das Beispiel zeigt, im allgemeinen keine regulär eingebettete Untermannigfaltigkeit. (Diese Aussage wird manchmal¹ als Satz von Chevalley-Frobenius ins Zentrum der Diskussion gestellt.)

¹siehe z.B. Veeravalli Seshadri Varadarajan, "Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations", GTM 102, Springer (1984); Anthony William Knap, "Lie Groups Beyond an Introduction", 2nd edition, Birkhäuser (2002)

5.1. DIE EXPONENTIALABBILDUNG

(1') Am schwierigsten ist der Nachweis, dass für gegebene Lie-Algebra \mathfrak{g} eine Lie-Gruppe G existiert, deren Lie-Algebra genau \mathfrak{g} ist. Fordert man außerdem, dass G einfach zusammenhängend ist, so ist G eindeutig bis auf Isomorphismus. Dies ist die Aussage des sogenannten "dritten Theorems von Sophus Lie".²

Wir können in dieser Vorlesung (aus Zeitgründen!) unmöglich alle Feinheiten der obigen Aussagen beleuchten, und beschränken uns daher auf einige lokale Resultate und eine Reihe von Beispielen. Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei

§ 5.1 Die Exponentialabbildung

Proposition 5.1. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld. Dann existiert für jedes $p \in M$ ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$ und eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ derart, dass*

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \quad \forall t \in I \quad \text{und} \quad \gamma(0) = p \quad (5.9)$$

Eine solche Integralkurve von X durch p ist lokal und maximal eindeutig.

Beweis. In lokalen Koordinaten (y^1, \dots, y^n) um p hat das Vektorfeld eine Darstellung

$$X = a^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (5.10)$$

mit glatten Funktionen a^i . Die Gleichung (5.9) ist dann das Anfangswertproblem

$$\frac{dy^i(t)}{dt} = a^i(y(t)) \quad \text{und} \quad y^i(0) = y^i(p) \quad (5.11)$$

und die Aussagen folgen aus Existenz- und Eindeigkeitssätzen für gewöhnliche Differentialgleichungen. (Glatt \Rightarrow Lipschitz-stetig.) OEA

Definition 5.2. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heisst *vollständig* falls für alle $p \in M$ die maximale Integralkurve durch p für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Bemerkungen. · Für ein vollständiges Vektorfeld garantieren Sätze über die glatte Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen die Glattheit der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad \Phi(t, p) = \gamma_p(t) \quad (5.12)$$

wo $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ die maximale Integralkurve von X durch p ist. Φ heisst der *Fluss* von X .

· Es ist leicht einzusehen, dass $\Phi(t_1 + t_2, p) = \Phi(t_1, \Phi(t_2, p))$, und wegen $\Phi(0, p) = p \quad \forall p \in M$ können wir Φ daher auffassen als "ein-Parameter Gruppe von Diffeomorphismen", d.h.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\rightarrow \text{Diff}(M), & \Phi(t)(p) &:= \Phi(t, p) \\ \text{erfüllt} & \Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1) \circ \Phi(t_2), & \Phi(0) &= \text{id}_M \end{aligned} \quad (5.13)$$

²das in dieser Form von E. Cartan stammt. Das "erste Theorem von Sophus Lie" besagt in einer anderen Sprache, dass isomorphe Lie-Algebren von lokal isomorphen Lie-Gruppen stammen.

Wir vereinbaren dabei, dass wir die Gleichung $\dot{\Phi}(0, p) = X_p$ verstehen können als die Aussage

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi^* = X \quad (5.14)$$

über die ein-Parameter Gruppe $t \mapsto \Phi^*(t) \in \text{Aut}(\mathcal{F}(M))$ von \mathbb{R} -linearen Automorphismen und die Derivation $X \in \text{Der}(\mathcal{F}(M))$.

· Für uns ist es wichtig, dass jedes links-invariante Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ auf einer Lie-Gruppe G vollständig ist. Denn für jede Integralkurve $\gamma : I \rightarrow G$ von X sind auch alle Linkstranslationen $L_g \circ \gamma$ Integralkurven. Insbesondere ist für $0 < t_0 \in I$,

$$t \mapsto \gamma(t_0)\gamma(t) \quad (5.15)$$

eine Integralkurve (durch $\gamma(t_0)$), welche für $t \in I \cap (I - t_0)$ mit $\gamma(t_0 + t)$ übereinstimmt und daher zur Fortsetzung von γ zu $I + t_0$ (und von da zu ganz \mathbb{R}) benutzt werden kann.

Definition 5.3. Für jedes $x \in \mathfrak{g} = T_e(G)$ sei $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ das linksinvariante Vektorfeld, und $\Phi^x : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(G)$ der zugehörige Fluss. Wir definieren die *Exponentialabbildung*

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad \text{durch} \quad \exp(x) := \Phi^x(1)(e) \quad (5.16)$$

Mit anderen Worten ist $\exp(x) = \gamma_e^x(1)$ die Integralkurve von X durch e , fortgesetzt bis zu $t = 1$.

Beispiel 5.4. Für $G = GL(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \ni x$ ist

$$\exp(x) = \text{Exp}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (5.17)$$

die gewöhnliche Matrix-Exponentialfunktion. (Eine in jeder (submultiplikativen) Norm auf der Algebra $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$ überall lokal gleichmässig konvergente Potenzreihe, deren Ableitung sich daher gliedweise berechnen lässt. Beachte, dass im allgemeinen $(D \text{Exp})_x(y) = \text{Exp}(x)y$ nur gilt, falls $[x, y] = 0$, dies aber zur Berechnung des Flusses ausreicht. Die Ableitung der Exponentialfunktion an anderen Stellen wird im § 5.3 berechnet.)

Das Ergebnis der nun folgenden Untersuchungen wird sein, dass sich die abstrakte Exponentialabbildung (5.16) FAPZ so verhält wie die Matrix-Exponentialfunktion.

Fakt 5.5. · $\exp(0) = e$

· Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi^x(t)(e) = \exp(tx) \quad (5.18)$$

und für alle $g \in G$ ist $t \mapsto g \exp(tx)$ eine Integralkurve von X durch g . Mit anderen Worten ist der Fluss des linksinvarianten X gegeben durch *Rechtsmultiplikation* (vgl. (5.15))

$$\Phi^x(t) = R_{\exp(tx)} \quad (5.19)$$

5.1. DIE EXPONENTIALABBILDUNG

· Nach Umschreiben der Differentialgleichung als $\dot{\gamma}(t) = (DL_{\gamma(t)})_e(x)$ folgt aus der glatten Abhängigkeit von den Parametern, dass \exp eine glatte Abbildung des Vektorraums \mathfrak{g} nach G ist. Die Ableitung bei $0 \in \mathfrak{g}$ ist wegen $(T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g})$

$$(D \exp)_0(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tx) = x \quad (5.20)$$

einfach $(D \exp)_0 = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, und hat insbesondere vollen Rang. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung ist daher \exp ein lokaler Diffeomorphismus einer Umgebung von $0 \in \mathfrak{g}$ auf eine Umgebung von $e \in G$, und kann daher (durch Translation) zur Koordinatisierung von (ganz) G verwendet werden.

· Man beachte aber, dass \exp im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist (siehe Übungen).

Die durch die Exponentialfunktion gegebenen Koordinaten reichen bereits aus, um Teile der Aussagen zur automatischen Regularität zu beweisen wie z.B. das

Theorem 5.6 (E. Cartan). *Sei H eine topologisch abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe G . Dann ist H eine regulär eingebettete Untermannigfaltigkeit, d.h. eine Unter-Lie-Gruppe.*

Wir zeigen stattdessen

Theorem 5.7. *Sei $\Phi : H \rightarrow G$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann ist Φ bereits glatt.*

Beweis. Der entscheidende Schritt ist der Spezialfall $H = \mathbb{R}$, d.h. ein-Parameter Untergruppen. In jedem Fall genügt es wegen der Translationsinvarianz, die Glattheit in einer Umgebung von $f \in H$ zu zeigen.

Beh.: Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ ein stetiger Homomorphismus. Dann ist γ bereits glatt.

Bew.: Sei $U \ni e$ eine offene Umgebung, auf der $\exp^{-1} : U \rightarrow \exp^{-1}(U) \subset \mathfrak{g}$ ein Diffeomorphismus ist, und $\epsilon > 0$ so dass $\gamma([- \epsilon, \epsilon]) \subset U$. Sei für $t \in [- \epsilon, \epsilon]$, $\alpha(t) = \exp^{-1}(\gamma(t))$, eine stetige Abbildung $\alpha : [- \epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathfrak{g}$. Wir behaupten, dass α linear ist, dh

$$\alpha(s\epsilon) = s\alpha(\epsilon) \quad (*) \quad (5.21)$$

$\forall s \in [-1, 1]$. Daraus folgt dann wegen $\gamma = \exp \circ \alpha$ die Glattheit von γ auf $(- \epsilon, \epsilon)$.

Bew.: Wegen der Homomorphiseigenschaft und $\exp(2x) = \exp(x)^2$ gilt

$$\alpha(\epsilon) = \exp^{-1}(\gamma(\frac{\epsilon}{2})^2) = 2 \exp^{-1}(\gamma(\frac{\epsilon}{2})) = 2\alpha(\frac{\epsilon}{2}) \quad (5.22)$$

Also gilt (*) für $s = \frac{1}{2}$. In ähnlicher Weise zeigt man die Gültigkeit für all $s = \frac{1}{2^n}$ und dann für alle $s \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Wegen der Stetigkeit folgt (*) für alle $s \in [-1, 1]$.

Für den allgemeinen Fall $\Phi : H \rightarrow G$ sei (mit $m = \dim(H) = \dim(\mathfrak{h})$)

$$b : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}, \quad (t_1, \dots, t_m) \mapsto \sum x_i t_i \quad (5.23)$$

ein linearer Isomorphismus und $B : \mathbb{R}^m \rightarrow H$

$$B(t_1, \dots, t_m) = \exp(x_1 t_1) \exp(x_2 t_2) \cdots \exp(x_m t_m) \quad (5.24)$$

Wegen $DB = b$ ist B in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^m$ noch ein Diffeomorphismus. (Dies sind sogenannte Exponentialkoordinaten der zweiten Art.) Daher hat $\Phi \circ B : \mathbb{R}^m \rightarrow G$ die Form

$$\Phi \circ B(t_1, \dots, t_m) = \Phi(\exp(x_1 t_1)) \cdots \Phi(\exp(x_m t_m)) \quad (5.25)$$

und da für jedes i der stetige Homomorphismus $t_i \mapsto \Phi(\exp(x_i t_i))$ bereits glatt ist, ist $\Phi \circ B$ glatt und daher in einer Umgebung von $e \in H$ auch $\Phi = (\Phi \circ B) \circ B^{-1}$. **OEΔ**

Die wesentliche formale Eigenschaft der Exponentialabbildung ist aber:

Proposition 5.8. *Die Exponentialabbildung ist veträglich mit Morphismen (funktoriell): Für einen Morphismus $\Phi : G \rightarrow H$ mit Ableitung $\phi := (D\Phi)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & H \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{h} \end{array} \quad (5.26)$$

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}$ und γ_e^x die Integralkurve von X durch e . Sei weiter $\tilde{x} = \phi(x) \in \mathfrak{h}$. Dann folgt aus

$$\frac{d}{dt} \Phi(\gamma_e^x(t)) = (D\Phi)_{\gamma_e^x(t)} X_{\gamma_e^x(t)} = \tilde{X}_{\Phi(\gamma_e^x(t))} \quad (5.27)$$

(vgl. (5.4)) und den Eindeutigkeitsätzen für gewöhnliche DGLs bei $t = 1$:

$$\Phi(\exp(x)) = \exp(\tilde{x}) = \exp(\phi(x)) \quad (5.28)$$

OEΔ

Zum Beispiel gilt für eine Unter-Lie-Gruppe $H \subset G$, dass $x \in \mathfrak{h} \Rightarrow \exp(x) \in H$.

§ 5.2 Die adjungierte Darstellung

Wir hatten bei (4.31) gesehen, dass die Lie-Klammer etwas tautologisch interpretiert werden kann als “Darstellung von \mathfrak{g} auf sich selbst durch Derivationen”. Wir wollen nun diese Aussage interpretieren als die zweite Ableitung der “Wirkung von G auf sich selbst durch Automorphismen”.

Zunächst die Begründung für $G = GL(n, \mathbb{R})$: In diesem Fall ist (siehe (4.45)) die Lie-Klammer einfach der Kommutator von Matrizen $x, y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Andererseits ist

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Exp}(sx) \text{Exp}(ty) \text{Exp}(-sx) \text{Exp}(-ty) = [x, y], \quad (5.29)$$

ebenfalls als Kommutator von Matrizen. Die Lie-Klammer ist also in der Tat die Ableitung des Gruppenkommutators.

5.2. DIE ADJUNGIERTE DARSTELLUNG

Für eine allgemeine Lie-Gruppe G definieren wir zunächst für jedes $g \in G$ die glatte Abbildung

$$\text{AD}_g : G \rightarrow G, \quad h \mapsto \text{AD}_g(h) := ghg^{-1} \quad (5.30)$$

Dies ist einerseits ein Automorphismus von G , d.h. $\text{AD}_g(h_1h_2) = \text{AD}_g(h_1)\text{AD}_g(h_2) \forall h_1, h_2 \in G$. Nach (5.1) ist dann die Ableitung von AD_g bei $h = e$ ein Automorphismus von \mathfrak{g} , d.h.

$$\text{Ad}_g := (D \text{AD}_g)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (5.31)$$

erfüllt $\text{Ad}_g([x, y]) = [\text{Ad}_g(x), \text{Ad}_g(y)]$. Ausserdem gilt nach (5.26)

$$\text{AD}_g \exp(x) = \exp(\text{Ad}_g x) \quad (5.32)$$

Andererseits gilt $\text{AD}_{g_1} \circ \text{AD}_{g_2} = \text{AD}_{g_1g_2}$, d.h. AD ist ein Gruppen-Homomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}(G)$.³ Dies überträgt sich auf $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \text{GL}(\mathfrak{g})$ als lineare Darstellung von G auf \mathfrak{g} . Wir behaupten nun

Proposition 5.9. *Es gilt*

$$(D \text{Ad})_e = \text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \subset \text{End}(\mathfrak{g}) \quad (5.33)$$

aus (4.31), (4.36).

Beweis. Zu zeigen ist, dass für $x, y \in \mathfrak{g}$ und

$$z := (D \text{Ad})_e(x)(y) \in \mathfrak{g} \quad (5.34)$$

für die zugehörigen linksinvarianten Vektorfelder die Identität

$$Z = [X, Y] \quad (5.35)$$

gilt. Wir schreiben dazu

$$z = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Ad}_{\exp(sx)}(y) \quad (5.36)$$

Das linksinvariante Vektorfeld ist dann

$$Z_g = (DL_g)_e \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Ad}_{\exp(sx)}(y) \right) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (DL_g)_e (\text{Ad}_{\exp(sx)}(y)) \quad (5.37)$$

Für festes s ist der Fluss des linksinvarianten Vektorfeldes $(DL_g)_e (\text{Ad}_{\exp(sx)}(y))$ gegeben durch $t \mapsto R_{\exp(t \text{Ad}_{\exp(sx)}(y))}$ (siehe (5.19)). Daher können wir gemäss der Vereinbarung (5.14) schreiben

$$Z = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{\exp(t \text{Ad}_{\exp(sx)}(y))}^* \quad (5.38)$$

³Das Bild $\text{AD}_G \subset \text{Aut}(G)$ ist dabei die normale Untergruppe der inneren Automorphismen von G . Für $\Phi \in \text{Aut}(G)$ ist $\Phi \text{AD}_g \Phi^{-1} = \text{AD}_{\Phi(g)}$.

Unter Verwendung von (5.32) und der Produktregel für lineare Abbildung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \underbrace{R_{\text{Ad}_{\exp(sx)} \exp(ty)}^*}_{= R_{\exp(sx) \exp(ty) \exp(-sx)}^*} \\
 &= R_{\exp(sx) \exp(ty) \exp(-sx)}^* \\
 &= R_{\exp(sx)}^* R_{\exp(ty)}^* R_{\exp(-sx)}^* \quad (5.39) \\
 &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} R_{\exp(sx)}^* Y R_{\exp(-sx)}^* \\
 &= XY - YX = [X, Y]
 \end{aligned}$$

OEΔ

Durch Anwendung von (5.26) auf $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ erhalten wir noch

Korollar 5.10.

$$\text{Ad}_{\exp(x)} = \exp(\text{ad}_x) \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \quad (5.40)$$

§ 5.3 Die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

Das Hauptergebnis des vorhergehenden § war die Einsicht, dass die Klammer auf $\mathfrak{g} = T_e G$ infinitesimal durch die Multiplikation in G bestimmt ist. Wir wollen nun umgekehrt zeigen, dass die Gruppenstruktur durch Integration aus der Lie-Klammer gewonnen werden kann. Die Integration ist lokal eindeutig, hängt aber global noch von gewissen zusätzlichen Daten ab, deren Diskussion wir dann im folgenden § wieder aufnehmen.

Problemstellung

Wir wissen, dass für gegebene Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra \mathfrak{g} die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ein lokaler Diffeomorphismus

$$0 \in u \xrightarrow{\cong} U \ni e \quad (5.41)$$

ist. Da \exp und Multiplikation stetig sind, existiert dann eine konvexe Umgebung $v \subset u$ von 0 so dass $\forall x, y \in v$ ein eindeutiges $z \in u$ existiert mit

$$\exp(x) \exp(y) = \exp(z) \quad (5.42)$$

Die Abbildung

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (x, y) \mapsto z =: B(x, y) \in \mathfrak{g} \quad (5.43)$$

ist glatt. Wir wollen durch eine (mehr oder minder) explizite Formel (siehe (5.57)) zeigen, dass B "nur von der Lie-Klammer abhängt". Das Ergebnis (von Baker-Campbell-Hausdorff, Anfang 20. Jh., mit Vervollständigung durch Dynkin, Mitte 20. Jh.) ist eine gewisse lokale konvergente Potenzreihe in ad_x, ad_y und zeigt, dass Gruppen mit isomorphen Lie-Algebren bereits lokal isomorph sein müssen.

Zur Herleitung der BCH-Formel halten wir zunächst fest, dass für $y = 0$

$$B(x, 0) = x \quad (5.44)$$

5.3. DIE BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-FORMEL

gilt (für x klein genug ist dies eindeutig), und leiten dann eine Differentialgleichung für $B(x, ty)$ mit $t \in [0, 1]$ her, welche wir zum Schluß integrieren, um $B(x, y)$ zu erhalten.

1. Schritt

Durch Ableiten nach t der Gleichung

$$\exp x \exp ty = \exp B(x, ty) \quad (5.45)$$

erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} (DL_{\exp x})_{\exp ty} \underbrace{(D \exp)_{ty}(y)}_{=(DL_{\exp(ty)})_e(y)} &= \underbrace{(D \exp)_{B(x, ty)}}_{\text{invertierbar für } x, y \text{ klein genug}} \frac{dB(x, ty)}{dt} \end{aligned} \quad (5.46)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \left((D \exp)_{B(x, ty)} \right)^{-1} \underbrace{DL_{\exp x} DL_{\exp ty}(y)}_{=DL_{\exp B(x, ty)}} \\ &= \left((DL_{\exp B(x, ty)})^{-1} (D \exp)_{B(x, ty)} \right)^{-1} (y) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Zur Erläuterung: Diese Differentialgleichung findet statt in einer Nullumgebung des Vektorraums $\mathfrak{g} = T_e G \ni B(x, ty)$, denn

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{(D \exp)_{B(x, ty)}} T_{\exp B(x, ty)} G \xrightarrow{(DL_{\exp B(x, ty)})^{-1}} \mathfrak{g} \quad (5.48)$$

Sie stellt einen Fortschritt dar aufgrund der folgenden expliziten Formel für diese "logarithmische Ableitung" der Exponentialabbildung:

2. Schritt

Lemma 5.11. *Für alle $z \in \mathfrak{g}$ gilt:*

$$\left. \begin{aligned} (DL_{\exp z})^{-1} (D \exp)_z &= \int_0^1 ds \exp(-s \operatorname{ad}_z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k+1}}{(k+1)!} (-\operatorname{ad}_z)^k \\ &= \frac{1 - \exp(-\operatorname{ad}_z)}{\operatorname{ad}_z} \end{aligned} \right\} \in \operatorname{End}(\mathfrak{g}) \quad (5.49)$$

Beweis. (Man rechne dies zunächst für Matrizen durch...)

$$\begin{aligned} (D \exp)_z(y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp(z + ty) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp z \exp(-z) \exp(z + ty) \\ &= DL_{\exp z} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp(-z) \exp(z + ty) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Mithilfe unserer Vereinbarungen aus § 5.1 schreiben wir dies als

$$\begin{aligned} \Rightarrow (DL_{\exp z})^{-1}(D \exp)_z(y) &= \underbrace{\frac{d}{dt} \Big|_0 \underbrace{R_{\exp(-z) \exp(z+ty)}^*}_{\in \text{Aut}(\mathcal{F}(G))}}_{\in \text{Der}(\mathcal{F}(G))} \Big|_{\mathcal{F}_e(G)} \in T_e \mathfrak{g} \\ &\quad \swarrow \\ &\quad \text{“Auswerten am neutralen Element”} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \int_0^1 ds \frac{d}{ds} \left(R_{\exp(-sz)}^* R_{\exp(s(x+ty))}^* \right) \Big|_{\mathcal{F}_e(G)} \end{aligned}$$

(unter Ausnutzung von (5.14), d.h. $\frac{d}{ds} R_{\exp(-sz)}^* = R_{\exp(-sz)}^*(-Z) = -ZR_{\exp(-sz)}^*$)

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \int_0^1 ds R_{\exp(-sz)}^*(-Z + Z + tY) R_{\exp(s(x+ty))}^* \Big|_{\mathcal{F}_e(G)} \\ &= \int_0^1 R_{\exp(-sz)}^* Y R_{\exp sz}^* \Big|_{\mathcal{F}_e(G)} \\ &= \int_0^1 ds \text{Ad}_{\exp(-sz)}(y) \\ \text{(Funktorialität (5.40))} \quad &= \int_0^1 ds \exp(-s \text{ad}_z)(y) \end{aligned} \tag{5.51}$$

OEΔ

Mit diesem Lemma kehren wir nun zur Herleitung von BCH zurück und schreiben (5.47) als

$$\frac{dB(x, ty)}{dt} = \underbrace{\frac{\text{ad}_{B(x, ty)}}{1 - \exp(-\text{ad}_{B(x, ty)})}}_{\text{definiert über eine für kleine } x, y \text{ konvergente Potenzreihe}}(y) \tag{5.52}$$

3. Schritt

Zur Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{B} = \frac{\text{ad}_B}{1 - \exp(-\text{ad}_B)}(y) \tag{5.53}$$

mit Anfangswert $B(0) = x$ sei $w := \exp(\text{ad}_B) - 1 \in \text{End}(\mathfrak{g})$. Dann können wir für kleine B mithilfe der Mercator-Reihe (deren Gültigkeit in (einer Nullumgebung in) $\text{End}(\mathfrak{g})$ wir als Übung lassen) schreiben, dass

$$\text{ad}_B = \log(1 + w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} w^k \tag{5.54}$$

Daher wird

$$\dot{B} = \left(\frac{1}{w} + 1 \right) \log(1 + w)(y) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} w^k \right)(y) \tag{5.55}$$

5.4. EINIGE GLOBALE AUSSAGEN

Zuletzt nutzen wir aus, dass wegen $\exp B = \exp x \exp ty \in G$, $\text{Ad} \in \text{Hom}(G, \text{Aut}(\mathfrak{g}))$ und (5.40)

$$\exp(\text{ad}_B) = \exp(\text{ad}_x) \exp(t \text{ad}_y) \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \quad (5.56)$$

gilt. Damit ist die rechte Seite der Dgl. (5.55) eine für kleine x, y für alle $t \in [0, 1]$ konvergente Potenzreihe in t mit Koeffizienten, welche Polynome in ad_x, ad_y sind, und die wir deshalb gliedweise integrieren können. Dies ist die wesentliche Aussage von BCH. Etwas expliziter haben wir

Proposition 5.12.

$$B(x, y) = x + y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} \int_0^1 dt \left(\sum_{i+j \geq 1} \frac{t^j}{i!j!} \text{ad}_x^i \text{ad}_y^j \right)^k (y) \quad (5.57)$$

Die ersten paar Terme rechnet man mit etwas Mühe nach:

$$B(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] - \frac{1}{12}[y, [x, y]] + \dots \quad (5.58)$$

aber danach wird es komplizierter...

§ 5.4 Einige globale Aussagen

Wir haben jetzt gesehen, dass die Klammer auf der Lie-Algebra einer gegebenen Lie-Gruppe letztere lokal bereits eindeutig festlegt. Es gilt insbesondere:

Theorem 5.13. *Sei $\Phi : G \rightarrow H$ ein Morphismus von Lie-Gruppen. Dann ist der zugehörige Lie-Algebra Homomorphismus $\phi = (D\Phi)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ genau dann ein Isomorphismus, falls Φ ein lokaler Isomorphismus von Lie-Gruppen ist, d.h. Φ bildet eine offene Umgebung $e \in U \subset G$ diffeomorph auf $\Phi(U) \subset H$ ab, und diese Einschränkung ist verträglich mit den Gruppenoperationen, solange diese wohl-definiert sind, d.h. für $g_1, g_2 \in U$ mit $g_1 g_2 \in U$ ist $\Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Phi(g_1 g_2)$.*

Es stellt sich dann die Frage:

(4) Wann ist ein solcher lokaler Isomorphismus ein (globaler) Isomorphismus $\Phi : G \cong H$?

Diese Frage ist verwandt mit der Frage aus der Einführung zu diesem Kapitel:

(2) Seien G, H zwei Lie-Gruppen, und $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus. Existiert dann ein Morphismus von Lie-Gruppen $\Phi : G \rightarrow H$ mit $\phi = (D\Phi)_e$?

5.4.1 Zusammenhang

Zur Illustration: Sei $\Phi : G \rightarrow H$ ein Isomorphismus von Lie-Gruppen. Dann sind die Produkte $G \times \mathbb{Z}/2 = G \times \{e\} \cup G \times \{\sigma\}$ und $H \times \mathbb{Z}/2$ ebenfalls Lie-Gruppen. $\tilde{\Phi} : G \times \mathbb{Z}/2 \rightarrow H$, $\tilde{\Phi}(g, \sigma) = \Phi(g)$ ist ein lokaler Isomorphismus, welcher global nicht injektiv ist, und $\hat{\Phi} : G \rightarrow H \hookrightarrow H \times \mathbb{Z}/2$ ist ein lokaler Isomorphismus, welcher global nicht surjektiv ist.

Ausserdem: Wir wissen (aus den Übungen) dass für eine gegebene Lie-Gruppe H die (topologische) Zusammenhangskomponente des neutralen Elements f die kleinste Untergruppe von H ist, die eine Umgebung von f enthält. Daher muss also das globale Bild eines lokalen Isomorphismus $\Phi : G \rightarrow H$ mindestens die Zusammenhangskomponente von f sein.

Fazit: Wir können eine positive Antwort auf die Frage (4) im allgemeinen nur dann erwarten, wenn G und H zusammenhängend sind und setzen dies im folgenden voraus.

5.4.2 Fundamentalgruppe

Zur Erinnerung: Sei M ein wegzusammenhängender topologischer Raum, und $p \in M$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M, p)$ mit Basispunkt p ist die Menge der Schleifen in M (stetige Abbildungen $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p$) modulo Homotopie ($\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \exists H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ stetig mit $H(0, t) = \gamma(t)$, $H(1, t) = \tilde{\gamma}(t)$, $H(s, 0) = H(s, 1) = p$), welche durch Aneinanderhängen verknüpft werden. Bis auf Isomorphismus hängt $\pi_1(M, p)$ nicht vom Basispunkt ab und wir schreiben dafür auch $\pi_1(M)$. Ein wegzusammenhängender topologischer Raum heisst einfach zusammenhängend, falls $\pi_1(M) = \{e\}$, d.h. alle Schleifen sind homotop zur konstanten Schleife.

Wie wir schon in anderen Zusammenhängen gesehen haben, erzwingt die Existenz einer algebraischen Struktur interessante Einschränkungen an die Topologie.

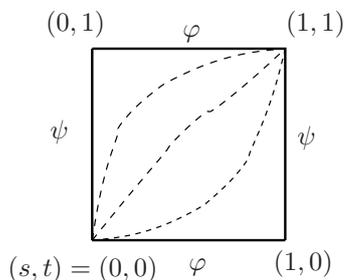
Lemma 5.14. *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Dann ist die Fundamentalgruppe von G abelsch.*

Beweis. (Die differenzierbare Struktur wird hier nicht benötigt!) Per Definition ist $\pi_1(G) = \pi_1(G, e)$ die Menge der stetigen Schleifen mit Basispunkt e in G modulo Homotopie. Die Gruppenstruktur $*$ ist durch Aneinanderhängen von Schleifen gegeben.

Seien nun $\varphi : [0, 1] \rightarrow G$ und $\psi : [0, 1] \rightarrow G$ zwei solche Schleifen, $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(1) = \psi(1) = e$. Wir müssen zeigen, dass $\varphi * \psi$ homotop zu $\psi * \varphi$ ist, und definieren dazu

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G, \quad F(s, t) = \varphi(s)\psi(t) \text{ (Multiplikation in der Gruppe!)} \quad (5.59)$$

Dann ist $\varphi = F(\cdot, 1) = F(\cdot, 0)$ und $\psi = F(0, \cdot) = F(1, \cdot)$. Daher ist $\varphi * \psi$ die Auswertung des unteren und rechten Randes des Quadrats $[0, 1] \times [0, 1]$, und $\psi * \varphi$ die des linken und oberen. Diese Schleifen sind homotop zueinander.



OEA

In "umgekehrter" Richtung gilt:

5.4. EINIGE GLOBALE AUSSAGEN

Lemma 5.15. *Sei $\Gamma \subset G$ eine diskrete normale Untergruppe einer zsh. Lie-Gruppe G . Dann ist $\Gamma \subset Z(G)$ im Zentrum von G .*

Beweis. Für $h \in \Gamma$ fest ist $G \ni g \mapsto ghg^{-1} = h' \in \Gamma$ stetig in g und daher konstant (G ist zusammenhängend, und Γ ist diskret). Mit $g \rightarrow e$ folgt $h' = h$. OEA

5.4.3 Überlagerungen

Erinnerung: Sei M ein wegzusammenhängender Raum. Eine Überlagerung von M ist ein topologischer Raum \tilde{M} mit einer stetigen surjektiven Abbildung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, so dass $\forall p \in M$ eine Umgebung $U \ni p$ existiert, deren Urbild unter π die Vereinigung disjunkter offener Mengen ist, $\pi^{-1}(U) = \cup_i U_i$, die unter π jeweils homöomorph auf U abgebildet werden. \tilde{M} heisst universelle Überlagerung, falls \tilde{M} zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

· Falls M wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend⁴ ist (z.B. eine Mannigfaltigkeit), so existiert eine eindeutige universelle Überlagerung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. Für gegebenen Basispunkt $p_* \in M$ kann man \tilde{M} identifizieren als

$$\{\gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = p_*\} / \text{Homotopie} \quad (5.60)$$

Die Projektion auf M ist $\pi(\gamma) = \gamma(1)$, $\pi_1(M)$ wirkt in natürlicher Weise auf \tilde{M} (durch "Decktransformationen") und es gilt $M = \tilde{M}/\pi_1(M)$.

Beispiele: · $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Universelle Überlagerung \mathbb{R}

· $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. Universelle Überlagerung \mathbb{C}

· $\pi_1(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}/2$. Universelle Überlagerung S^3

Überlagerungen sind verträglich mit der Gruppenstruktur.

Lemma 5.16. (i) *Sei $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ die universelle Überlagerung einer zsh. Lie-Gruppe G . Dann existiert für jedes $\tilde{e} \in \tilde{G}$ mit $\pi(\tilde{e}) = e \in G$ eine eindeutige Lie-Gruppen-Struktur auf \tilde{G} mit der \tilde{e} das neutrale Element ist, und π ein Morphismus von Lie-Gruppen.*

(ii) *Für eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset Z(G)$ (im Zentrum von G) existierte eine eindeutige Lie-Gruppen-Struktur auf G/Γ so dass die Quotientenabbildung ein Morphismus von Lie-Gruppen ist.*

Beweis. (i) Gestützt auf (5.60) (mit e als Basispunkt und \tilde{e} als dem konstanten γ) definieren wir die Multiplikation in \tilde{G} durch

$$(\gamma_1 \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) \gamma_2(t) \quad (5.61)$$

(was analog zu den Überlegungen zum Beweis von Lemma 5.14 das Gleiche gibt wie beispielsweise

$$(\gamma_1 \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_2(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_1(2t-1) \tilde{\gamma}_2(1) & t \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (5.62)$$

und verifizieren dann die übrigen Eigenschaften als Übung. Gleiches für (ii). OEA

⁴D.h. jeder Punkt besitzt eine einfach zusammenhängende Umgebung. Für hausdorffsche Eigenschaften siehe Literatur.

Bemerkungen. Die universelle Überlagerung \tilde{G} einer Lie-Gruppe G heisst auch *einfach zusammenhängende Form* von G . Falls das Zentrum von \tilde{G} diskret ist, so heisst $\tilde{G}/Z(\tilde{G})$ die *adjungierte Form* von G .

5.4.4 Einfacher Zusammenhang

Für unsere Fragen ist jetzt wichtig:

Lemma 5.17. *Seien G und H zusammenhängend und sei $\Phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen, welcher ein lokaler Isomorphismus ist. Dann ist Φ eine Überlagerung.*

Beweisskizze. Φ ist natürlich stetig, und surjektiv da H zusammenhängend ist. Der Kern $\Gamma = \text{Ker}(\Phi)$ ist diskret, da Φ ein lokaler Isomorphismus ist. M.a.W. gibt es eine offene Umgebung $e \in U \subset G$ sodass $U = U^{-1}$ und $U^2 \cap \Gamma = \{e\}$, und $\Phi|_U : U \xrightarrow{\cong} \Phi(U)$. Dann ist $\Phi^{-1}(\Phi(U)) = \Gamma U = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$. OEΔ

Die Antwort auf die Frage (4) lautet damit:

Proposition 5.18. *Ein Morphismus von zsh. Lie-Gruppen $\Phi : G \rightarrow H$, welcher ein lokaler Isomorphismus ist, ist ein globaler Isomorphismus, falls H einfach zusammenhängend ist.*

Schliesslich beantworten wir wie versprochen die Frage (2):

Theorem 5.19. *Seien G, H zusammenhängende Lie-Gruppen. Falls G einfach zusammenhängend ist, so existiert zu jedem Morphismus von Lie-Algebren $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein eindeutiger Morphismus von Lie-Gruppen $\Phi : G \rightarrow H$ mit $(D\Phi)_e = \phi$.*

Beweisskizze. Betrachte den Graphen von ϕ :

$$\delta := \{(x, \phi(x)), x \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \tag{5.63}$$

Da ϕ ein Homomorphismus ist, ist δ eine Unter-Lie-Algebra, und nach dem Satz von Chevalley-Frobenius (den wir hier nicht beweisen wollen, siehe aber Punkt (3') auf Seite 50) existiert eine eindeutige zsh. Lie-Untergruppe $D \subset G \times H$ mit Lie-Algebra δ . Die Projektion $p_1 : D \rightarrow G$ auf den ersten Faktor ist ein lokaler Isomorphismus, und daher nach Prop. 5.18 ein globaler, da G einfach zusammenhängend ist. Dann ist $\Phi := p_2 \circ p_1^{-1} : G \rightarrow H$ das gewünschte Integral von ϕ . OEΔ

§ 5.5 Nieder-dimensionale Beispiele

Die Ziele in den folgenden Kapiteln sind die Strukturtheorie von Lie-Algebren, insbesondere die Klassifikation der einfachen Lie-Algebren über \mathbb{C} , sowie die Beschreibung derjenigen irreduziblen Darstellungen dieser Lie-Algebren, die sich zu Darstellungen von zugehörigen kompakten Gruppen integrieren lassen. Wir geben zunächst einen kleinen aus Fulton&Harris entnommenen Eindruck, ohne jeden Schritt vollständig zu begründen.

5.5. NIEDER-DIMENSIONALE BEISPIELE

5.5.1 Dimension 1

· Eine ein-dimensionale Lie-Algebra ist notwendigerweise abelsch. Die zugehörige zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe ist einfach der zugrundeliegende Vektorraum $G = \mathfrak{g}$ ($= \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) mit Addition als Gruppenoperation. Jede andere Lie-Gruppe mit dieser Lie-Algebra ist dann der Quotient von G durch eine diskrete Untergruppe, d.h. einem Gitter im Vektorraum. Für $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ gibt es bis auf Skalierung nur ein nicht-triviales Gitter, und die zugehörige Lie-Gruppe ist $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1 \cong U(1)$. Es gibt also genau zwei Isomorphismenklassen von reell ein-dimensionalen zsh. Lie-Gruppen.

· Über den komplexen Zahlen ist die Situation etwas interessanter: Ein Gitter vom Rang 1 führt zur Lie-Gruppe $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C} \setminus 0 = \mathbb{C}^\times$ als multiplikative Gruppe. Dies ist das Integral (im Sinne des vorherigen §) einer beliebigen nicht-trivialen ein-dimensionalen Darstellung von $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$, $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C} = \text{End}(\mathbb{C})$, definiert durch $\rho(1) = \alpha$:

$$\begin{array}{ccc} \rho(\exp(z)) = e^{\alpha z} \in \mathbb{C}^\times & & \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{"abstrakte Exponentialfunktion"} & \text{"gewöhnliche e-Funktion"} & \end{array} \quad (5.64)$$

Es gibt auch treue Darstellungen der universellen Überlagerung \mathbb{C} von \mathbb{C}^\times , wie z.B. die durch obere Dreiecksmatrizen $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, welche aber nicht irreduzibel ist.

· Gitter in \mathbb{C} vom Rang 2 sind, wie allgemein bekannt, bis auf komplexe Isomorphismen von der Form

$$\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}, \quad \tau \in \{\text{Im}(\tau) > 0\}/SL(2, \mathbb{Z}) \quad (5.65)$$

Beachte, dass als reelle Lie-Gruppen alle $\mathbb{C}/\Lambda \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = (S^1)^2$ isomorph sind. Sie unterscheiden sich aber in der "komplexen Struktur". Man nennt \mathbb{C}/Λ wie auch \mathbb{C}^\times "Tori". Weiteres in Vorlesungen zu Algebraischer Geometrie und Elliptischen Kurven.

5.5.2 Dimension 2

· Der abelsche Fall lässt sich ähnlich wie oben diskutieren. Das Ergebnis über \mathbb{C} ist allerdings einiges komplizierter und wir überlassen ihn daher der Literatur (z.B. Fulton&Harris).

· Sei nun $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$ eine nicht-abelsche zwei-dimensionale reelle Lie-Algebra. Bezüglich einer Basis $\{x, y\}$ von \mathfrak{g} ist die Lie-Klammer vollständig bestimmt durch $[x, y] = z = \alpha x + \beta y \neq 0$. Das Bild $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ von \mathfrak{g} unter der Lie-Klammer ist also ein-dimensional und es lassen sich x, y so wählen, dass $[x, y] = x$. Die adjungierte Darstellung hat in dieser Basis die Matrix-Darstellung

$$\text{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

und integriert sich zur zsh. und einfach zsh. Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\} \cong \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \subset GL(2, \mathbb{R}) \quad (5.67)$$

mit Multiplikation $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 + a_1 b_2)$.

· Über \mathbb{C} ist die Klassifikation der Lie-Algebren die gleiche, die möglichen komplexen Gruppen sind aber wieder etwas interessanter, siehe F&H.

5.5.3 Dimension 3

· Falls $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$, so ist die Kommutator-Algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ eine höchstens zwei-dimensionale Unter-Lie-Algebra von \mathfrak{g} , die wir bereits klassifiziert haben. Für die Erweiterung zu \mathfrak{g} siehe F&H und die Übungen.

· Sei nun \mathfrak{g} eine drei-dimensionale Lie-Algebra mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. In diesem Fall ist die gesamte Information über \mathfrak{g} in der *adjungierten Darstellung* enthalten. Sei zunächst $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^3$.

Beh.: Es existiert ein $h \in \mathfrak{g}$, sodass $\text{ad}_h : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ einen Eigenvektor mit nicht-verschwindendem Eigenwert hat.

Bew.: Für eine beliebige Basis $\{x, y, z\}$ von \mathfrak{g} müssen nach Voraussetzung die drei Klammern $[x, y]$, $[x, z]$ und $[y, z]$ linear unabhängig sein. Für jedes $0 \neq x \in \mathfrak{g}$ hat also ad_x Rang 2. Entweder hat $\text{ad}_x \in \text{End}(\mathbb{C}^3)$ einen nicht-verschwindenden Eigenwert, oder ad_x ist nilpotent, d.h. insbesondere $\text{Ker}(\text{ad}_x^2) \supsetneq \text{Ker}(\text{ad}_x)$. Es existiert also ein y mit $\text{ad}_x(y) \neq 0$, und $\text{ad}_x^2(y) = 0$. Dann muss $\text{ad}_x(y) = [x, y] = \alpha x$ sein für ein $\alpha \neq 0$. Dann aber ist $\text{ad}_y(x) = -\alpha x$, also hat ad_y einen Eigenvektor mit nicht-verschwindendem Eigenwert.

· Seien also nach Dividieren durch den halben Eigenwert h und e derart, dass $\text{ad}_h(e) = 2e$. Da $\text{ad}_h \in [\text{ad}_{\mathfrak{g}}, \text{ad}_{\mathfrak{g}}]$, hat ad_h als Kommutator von linearen Abbildungen verschwindende Spur. Der letzte Eigenwert von ad_h muss also -2 sein. Sei f ein Eigenvektor dazu. Die Jacobi-Identität erzwingt nun

$$[h, [e, f]] = [[h, e], f] + [e, [h, f]] = [2e, f] + [e, -2f] = 0 \quad (5.68)$$

Also muss $[e, f]$ proportional zu h sein, und wir können $[e, f] = h$ annehmen.

· Damit hat also jede solche drei-dimensionale komplexe Lie-Algebra eine Basis $\{h, e, f\}$ mit

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h \quad (5.69)$$

und ist damit isomorph zur Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{\text{tr } x = 0\}$ mit den Identifikationen

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

· Es gibt zwei (zsh.) komplexe Lie-Gruppen mit dieser Lie-Algebra: $SL(2, \mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend⁵. Wegen $Z(SL(2, \mathbb{C})) = \mathbb{Z}/2$ bleibt als zweite Möglichkeit

⁵*Bew.:* $\mathbb{C} \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$, fiber parametrized by c or d depending on a or b non-zero.

5.5. NIEDER-DIMENSIONALE BEISPIELE

nur $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm \text{id}\} = PSL(2, \mathbb{Z})$.

- Ersetzen wir nun \mathbb{C} durch \mathbb{R} , so verzweigt sich die obige Diskussion genau dann, wenn die Eigenwerte von h nicht reell sind. Andernfalls erhalten wir als Lie-Algebra einfach (5.69) über \mathbb{R} , m.a.W. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

- Sind die Eigenwerte von h komplex, so müssen sie komplex konjugiert sein und zu null addieren, also bleibt bis auf Multiplikation von h mit einem reellen Skalar nur die Möglichkeit $\pm i$. Dann aber existiert eine Basis $\{z = h, x, y\}$ mit $\text{ad}_z(x) = y$, $\text{ad}_z(y) = -x$. Die Jacobi-Identität erzwingt wieder $[x, y] = \lambda z$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ und durch reelles Skalieren von x und y können wir $\lambda = \pm 1$ erreichen.

- Falls $\lambda = -1$, so ist $x + z$ Eigenvektor von ad_y mit Eigenwert 1, und wir erhalten wieder $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

- Der verbleibende Fall ist $\lambda = +1$, d.h. die Lie-Algebra ist

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y \quad (5.71)$$

welche wir als isomorph zu $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ oder auch $\mathfrak{su}(2)$ erkennen:

$$x = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad z = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

- Zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ gehörige Lie-Gruppen sind $SL(2, \mathbb{R})$ mit Fundamentalgruppe \mathbb{Z}^6 und Zentrum $\mathbb{Z}/2$, ihre universelle Überlagerung und die adjungierte Form $PSL(2, \mathbb{R})$.

- Für $\mathfrak{su}(2)$ haben wir $SU(2)$ und $SO(3, \mathbb{R})$, siehe § 1.2.

5.5.4 Endlich-dimensionale Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Sei $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(V)$ eine endlich-dimensionale irreduzible komplexe Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Wir arbeiten in der Basis (5.69) und setzen für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$

$$V_\alpha := \text{Ker}(\rho(h) - \alpha) \subset V \quad (5.73)$$

Aus $[h, e] = 2e$ und $[h, f] = -2f$ folgt

$$\rho(e)(V_\alpha) \subset V_{\alpha+2} \quad \rho(f)(V_\alpha) \subset V_{\alpha-2} \quad (5.74)$$

Da V nicht-trivial ist, existiert ein $V_\alpha \neq 0$ und da V endlich-dimensional ist (und die V_α linear unabhängig voneinander), derart dass $V_{\alpha+2} = 0$. Nenne dies V_l und wähle $0 \neq v_l \in V_l$. Es gilt $\rho(e)v_l = 0$, $\rho(h)v_l = lv_l$. Setze dann

$$v_{l-2} := \rho(f)v_l \quad (5.75)$$

Wegen $\rho(e)v_{l-2} = lv_l$ kann v_{l-2} nur dann $= 0$ sein, falls $l = 0$. Andernfalls sei

$$\begin{aligned} v_{l-4} &:= \rho(f)v_{l-2}, \quad \text{mit } \rho(e)v_{l-4} = (2l-2)v_{l-2} \\ &\vdots \\ v_{l-2k} &:= \rho(f)^k v_l, \quad \text{mit } \rho(e)v_{l-2k} = k(l-k+1)v_{l-2(k-1)} \quad (\text{Rekursion!}) \end{aligned} \quad (5.76)$$

⁶ $\mathbb{R} \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, vgl. Fussnote 5.

Falls $v_{l-2(k-1)} \neq 0$, so kann v_{l-2k} nur dann 0 sein, falls $l - k + 1 = 0$. Da V endlichdimensional ist, muss dies eintreten (die v_{l-2k} sind linear unabhängig falls sie nicht verschwinden). Also ist $l \in \mathbb{N}_0$. Der von $v_l, v_{l-2}, \dots, v_{l-2k} = v_{-l}$ aufgespannte Unterraum von V ist invariant unter $\rho(\mathfrak{g})$ und da V irreduzibel ist, muss er bereits ganz V sein. Dies sind dann alle irreps von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

- Wir verzichten hier auf vollständige Zerlegbarkeit.
- Der Casimir-Operator ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{1}{2}h^2 + ef + fe\right)(v_k) &= \left(\frac{1}{2}\rho(h)^2 + \rho(e)\rho(f) + \rho(f)\rho(e)\right)(v_k) \\ &= \left(\frac{1}{2}(l - 2k)^2 + k(l - k + 1) + (k + 1)(l - k)\right) \quad (5.77) \\ &= \left(\frac{1}{2}l^2 + l\right)(v_l) = l\left(\frac{l}{2} + 1\right)(v_l) \end{aligned}$$

wirkt also wie ein Vielfaches der Identität auf den irreduziblen Darstellungen.

KAPITEL 6

STRUKTURTHEORIE

Nach den Ergebnissen des letzten Kapitels ist die Theorie der Lie-Gruppen, ihrer Morphismen und Darstellungen “äquivalent” zur Theorie der endlich-dimensionalen Lie-Algebren unter der Voraussetzung, dass man sich auf zusammenhängende und einfach zusammenhängende Gruppen beschränkt. Wir wenden uns nun der abstrakten Strukturtheorie der Lie-Algebren zu. Am Anfang steht eine Reihe algebraischer Definitionen, zwei geometrische Charakterisierungen (Algebra halbeinfach \Leftrightarrow Killing Form nicht-entartet, Algebra reduktiv \Leftarrow Gruppe kompakt) bilden den Schlusspunkt.

§ 6.1 Definitionen

· Zunächst sei an Definition 4.9 erinnert, und insbesondere an die Formulierungen (i) und (ii) der Jacobi-Identität auf Seite 40

$$\text{ad}_{[x,y]} = [\text{ad}_x, \text{ad}_y] = \text{ad}_x \text{ad}_y - \text{ad}_y \text{ad}_x \quad (6.1)$$

$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ ist also eine Darstellung von \mathfrak{g} .

· Zur Sicherheit erinnern wir an dieser Stelle daran, dass für zwei Darstellungen $\rho_{1,2} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_{1,2})$ die *direkte Summe* definiert ist als

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(x) := \rho_1(x) \oplus \rho_2(x) \quad (6.2)$$

dass hingegen beim *Tensorprodukt* von Darstellungen

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(x) = \rho_1(x) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes \rho_2(x) \quad (6.3)$$

zu verwenden ist, und beim Dualraum

$$\rho^*(x) = -\rho(x)^* \quad (6.4)$$

Und noch was:

· Falls $\mathfrak{g}_{1,2}$ Lie-Algebren sind, so ist die direkte Summe von Vektorräumen in natürlicher Weise eine Lie-Algebra mit der Lie-Klammer:

$$[x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2] := [x_1, y_1] \oplus [x_2, y_2] \quad (6.5)$$

($\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ mit dieser Lie-Klammer heisst manchmal auch “Produkt” der Lie-Algebren \mathfrak{g}_1 und \mathfrak{g}_2 .) Dies geht im allgemeinen nicht für ein Tensorprodukt ($[x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2] =$???!), ausser für die Skalarerweiterung:

· Falls \mathfrak{g} eine reelle Lie-Algebra ist, so ist die Komplexifizierung des Vektorraums $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ auch in natürlicher Weise eine Lie-Algebra

$$[x \otimes \lambda, y \otimes \mu] := [x, y] \otimes \lambda\mu \quad (6.6)$$

Als reeller Vektorraum ist natürlich $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ (mit dem Isomorphismus $x + iy \mapsto x \oplus y$), allerdings ist die Lie-Klammer (6.6) nicht die gleiche wie (6.5):

$$[x_1 + iy_1, x_2 + iy_2] = [x_1, x_2] - [y_1, y_2] + i[x_1, y_2] + i[y_1, x_2] \quad (6.7)$$

Nun aber zur Sache:

Definition 6.1. Ein *Ideal* in einer Lie-Algebra ist ein linearer Unterraum $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ derart dass

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}, \quad \text{d.h., } \forall x \in \mathfrak{g}, a \in \mathfrak{a} \text{ ist auch } [x, a] \in \mathfrak{a} \quad (6.8)$$

Definition 6.2. Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heisst *einfach*, falls \mathfrak{g} nicht abelsch ist und kein nicht-triviales Ideal enthält (d.h., jedes Ideal ist entweder null oder ganz \mathfrak{g}).

Bemerkungen. · Ein Ideal ist insbesondere eine Unter-Lie-Algebra, welche vermöge der Korrespondenz zu Lie-Untergruppen einem Normalteiler entspricht. (Ganz explizit sieht man dies lokal aus der BCH Formel (5.57), d.h. $\exp(x) \exp(a) \exp(-x) \in \exp(\mathfrak{a})$, vervollständigen kann man mit einem Zusammenhangsargument.)

· Die Einschränkung “nicht-abelsch” bei der Einfachheit entspricht hingegen nicht ganz den algebraischen Konventionen. Sie kann gegebenenfalls durch $\dim \mathfrak{g} > 1$ ersetzt werden.

· Ein Ideal ist auch genau das Gleiche wie ein ad-invarianter Unterraum, so dass “einfach” das Gleiche ist wie: “Die adjungierte Darstellung ist nicht-trivial und irreduzibel.”

Definition 6.3. Eine Lie-Algebra heisst *reduktiv*, falls die adjungierte Darstellung vollständig zerlegbar ist.

Lemma 6.4. (*Eigenschaften von Idealen*)

(i) Falls \mathfrak{a} und \mathfrak{b} Ideale in \mathfrak{g} sind, so auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$.

(ii) Falls $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal ist, so ist der Quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ eine Lie-Algebra und für jeden Lie-Algebra Homomorphismus $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ist $\text{Ker}(\phi) \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal.

Beweis. (i) Nachrechnen. (ii) Wie üblich: $[x+a, y+b] = [x, y] + [a, y] + [x, b] + [a, b] = [x, y] \text{ mod } \mathfrak{a}$; $\phi(a) = 0 \Rightarrow \phi([x, a]) = [\phi(x), \phi(a)] = 0$. OEΔ

Für die Strukturtheorie wichtig sind die Ideale, die über der Lie-Klammer definiert sind.

Definition 6.5. (i) Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra. Das Ideal $\mathcal{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[x, y], x, y \in \mathfrak{g}\}$ heisst die *derivierte Algebra* oder *Kommutatoralgebra* von \mathfrak{g} .

(ii) Die absteigende Kette von Idealen

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1] \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{i+1} := [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^i] \supset \cdots \quad (6.9)$$

6.1. DEFINITIONEN

von Idealen heisst derivierte oder Kommutatorfolge. Falls $\mathfrak{g}^i = 0$ für ein i , so heisst \mathfrak{g} *auflösbar*.

(iii) Die absteigende Kette von Idealen

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \mathfrak{g}_2 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1] \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{i+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \supset \cdots \quad (6.10)$$

heisst untere (oder absteigende) Zentralreihe von \mathfrak{g} . Falls $\mathfrak{g}_i = 0$ für ein i , so heisst \mathfrak{g} *nilpotent*.

Beispiel 6.6. · Die Lie-Algebra der oberen Dreiecksmatrizen ist auflösbar (aber nicht nilpotent).

· Die Lie-Algebra der strikt oberen Dreiecksmatrizen ist nilpotent.

Bemerkungen. · Jede nilpotente Algebra ist auflösbar, die Umkehrung gilt aber nicht, wie das Beispiel zeigt.

· Jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ einer nilpotenten Lie-Algebra ist ad-nilpotent (d.h. $(\text{ad}_x)^i = 0$). Die recht erstaunliche Umkehrung dieser Implikation ist der Inhalt des Satzes von Engel (Theorem 6.13).

Lemma 6.7. *Sei \mathfrak{g} eine auflösbare/nilpotente Lie-Algebra.*

(i) *Jede Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist auflösbar/nilpotent.*

(ii) *Falls $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus ist, so ist $\phi(\mathfrak{g})$ auflösbar/nilpotent.*

Beweis. (ii) folgt aus $\phi([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) = [\phi(\mathfrak{a}), \phi(\mathfrak{b})]$ für beliebige Teilmengen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$; (i) aus $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}$. OEΔ

Eine ähnliche Aussage gilt ganz entschieden nicht für einfache Lie-Algebren. Eine Eigenschaft, die nilpotent von auflösbar unterscheidet, ist

Lemma 6.8. (i) *Sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal. Falls \mathfrak{a} und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar sind, so ist auch \mathfrak{g} auflösbar.*

(ii) *Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ zwei auflösbare Ideale. Dann ist auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ auflösbar.*

Beweis. (i) Sei $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die Projektion. Wegen $\pi(\mathfrak{g}^i) = (\phi(\mathfrak{g}))^i$ (siehe Beweis von Lemma 6.7) und der Auflösbarkeit von $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \pi(\mathfrak{g})$ ist $\pi(\mathfrak{g}^i) = 0$ für ein i . Mit anderen Worten ist $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{a}$. Da aber \mathfrak{a} auflösbar ist, und $(\mathfrak{g}^i)^j = \mathfrak{g}^{i+j-1}$, ist daher $\mathfrak{g}^{i+j} = 0$ für ein j , also ist \mathfrak{g} auflösbar.

(ii) folgt dann aus (i) und der Exaktheit von

$$\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \quad (6.11)$$

(d.h.: $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ist nach Lemma 6.7 (ii) auflösbar weil \mathfrak{b} auflösbar ist. Mit (i) folgt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.) OEΔ

Ideale in \mathfrak{g} sind durch Inklusion partiell geordnet. Falls \mathfrak{r} ein maximales auflösbare Ideal ist, und \mathfrak{b} ein beliebiges auflösbare Ideal, so gilt $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r} + \mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, also $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$. Daher ist das maximale auflösbare Ideal eindeutig.

¹Eine solche Additivität gilt nicht für die untere Zentralreihe.

Definition/Lemma 6.9. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra.

- (i) Das maximale auflösbare Ideal $\mathfrak{r} = \text{rad}(\mathfrak{g})$ von \mathfrak{g} heisst das Radikal.
- (ii) \mathfrak{g} heisst halb-einfach, falls $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$, d.h. \mathfrak{g} besitzt kein auflösbares Ideal.
- (iii) Jedenfalls ist $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ halb-einfach (eventuell trivial).

Bemerkungen. · Da eine halbeinfache Lie-Algebra insbesondere triviales Zentrum hat, ist die adjungierte Darstellung treu (d.h. $\text{ad}_x \neq 0 \forall x \in \mathfrak{g}$). Um eine treue Darstellung einer beliebigen Lie-Algebra zu bekommen (Satz von Ado, mithilfe dessen gezeigt werden kann, dass jede Lie-Algebra von einer Lie-Gruppe kommt), bleibt dann noch die Konstruktion einer treuen Darstellung des Radikals, und das Zusammensetzen mit der adjungierten Darstellung des halbeinfachen Quotienten.

· Man überlege an dieser Stelle, dass für eine reelle Lie-Algebra \mathfrak{g}

$$[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\mathbb{C}} \quad (6.12)$$

gilt. Insbesondere ist \mathfrak{g} auflösbar $\Leftrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ is auflösbar.

Wir werden uns in den nächsten Abschnitten allmählich auf die einfachen (oder allenfalls noch reduktiven = halb-einfachen + abelschen) Lie-Algebren zurückziehen, vor allem deshalb, weil deren Darstellungstheorie harmonischer ist. Um zu unterstreichen, dass die auflösbaren Teile mitnichten in der Physik keine Rolle spielen, geben wir noch die folgenden Beispiele.

Beispiel 6.10 (Die affine Gruppe). Sei V ein Vektorraum. Eine affine (oder affin-lineare) Transformation ist (etwas informell gesagt) eine bijektive Abbildung $V \rightarrow V$, die auf Differenzen $v_1 - v_2$ linear wirkt. Mit anderen Worten ist dies ein Paar (R, a) mit $R \in GL(V)$ und $a \in V$ und

$$(R, a)(v) = Rv + a \quad (6.13)$$

Seit einiger Zeit schreiben wir auch $iGL(V)$ für die Gruppe der affin-linearen Transformationen von V .

Verknüpfung:

$$\begin{aligned} (R, a)(S, b) &= (RS, a + Rb) \\ (R, a)^{-1} &= (R^{-1}, -R^{-1}a) \\ (R, a)(S, b)(R, a)^{-1} &= (RS, a + Rb), (R^{-1}, -R^{-1}a) \\ &= (RSR^{-1}, a + Rb - RSR^{-1}a) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Wir können daraus sehen, dass $GL(V)$ und V beides Untergruppen von $iGL(V)$ sind. Die Einbettungen sind:

$$\begin{aligned} GL(V) \ni R &\mapsto (R, 0) \in iGL(V) \\ V \ni a &\mapsto (\text{id}_V, a) \in iGL(V) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} (R, a)(S, 0)(R, a)^{-1} &= (RSR^{-1}, a - RSR^{-1}A) \\ (R, a)(\text{id}_V, b)(R, a)^{-1} &= (\text{id}_V, a + Rb - a = Rb) \end{aligned} \quad (6.16)$$

6.2. SÄTZE VON ENGEL UND LIE

zeigen dann, dass V ein Normalteiler von $iGL(V)$ ist, $GL(V)$ jedoch nicht. Vielmehr haben wir es mit einem semi-direkten Produkt zu tun:

$$V \rightarrow iGL(V) = V \rtimes GL(V) \rightarrow GL(V) \quad (6.17)$$

Eine Matrixdarstellung von $iGL(V)$ erhält man auf $V \oplus \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) durch

$$(R, a) \mapsto \begin{pmatrix} R & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(V \oplus \mathbb{R}) \quad (6.18)$$

Das wichtigste Beispiel einer affinen Gruppe in der Physik ist die Poincaré-Gruppe, in der $V = \mathbb{R}^{3,1}$ und die allgemein lineare Gruppe noch durch die Lorentz-Gruppe (oder deren universelle Überlagerung) ersetzt wird, die das relativistische innere Produkt der Signatur $(3, 1)$ invariant lässt. In diesem Zusammenhang spielt allerdings die Darstellung (6.18) wegen der fehlenden Möglichkeit zur Unitarität eine sehr untergeordnete Rolle. Vielmehr wird man dort zu unendlich-dimensionalen Darstellungen gezwungen.

Durch Ableiten von (6.18) erhält man noch die Darstellung der Erweiterung von Lie-Algebren

$$V \rightarrow i\text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V) \quad (6.19)$$

in der Form

$$\left[\begin{pmatrix} x & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} xy - yx & xb - ya \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

In (6.19) ist V ein (abelsches) Ideal, $\text{End}(V)$ nur eine Unteralgebra.

· Beachte allerdings, dass $\text{End}(V)$ nicht einfach ist, denn man kann ja noch den ad-invarianten Unterraum $\mathbb{R} \cdot \text{id}_V$ durch Spurbildung abspalten. Die Gleichung

$$\begin{array}{ccc} \text{End}(V) = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathbb{R} \cdot \text{id}_V & & \\ \uparrow \quad \quad \uparrow & & \\ \text{reduktiv} \quad \quad \text{einfach} & & \end{array} \quad (6.21)$$

ist eine direkte Summe von Lie-Algebren wie in (6.5).

· Das Radikal von $i\text{End}(V)$ ist dann zwei-dimensional. Die Gleichung

$$\text{rad}(i\text{End}(V)) = V \oplus \mathbb{R} \quad (6.22)$$

gilt allerdings *nur* auf dem Niveau der Vektorräume, und *nicht* für die Lie-Algebren. Tatsächlich ist $\text{rad}(i\text{End}(V))$ auflösbar, aber nicht nilpotent oder gar abelsch!

Beispiel 6.11 (Heisenberg-Algebra). Sehr interessant. Siehe Übungen

§ 6.2 Sätze von Engel und Lie

Diese beiden zentralen Lemmas der Strukturtheorie besagen, dass die Intuition “auflösbar = obere Dreiecksmatrizen” und “nilpotent = strikt obere Dreiecksmatrizen” die Situation im wesentlichen richtig erfasst.

Lemma 6.12 (Satz von Lie). *Sei \mathfrak{g} eine auflösbare Lie-Algebra (über \mathbb{R} oder \mathbb{C}) und sei $(V \neq 0, \rho)$ eine endlich-dimensionale komplexe Darstellung von \mathfrak{g} . Dann existiert ein gemeinsamer Eigenvektor für alle $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, d.h. ein nicht-verschwindendes $v \in V$ mit einer Funktion $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ derart dass*

$$\rho(x)v = \lambda(x)v \quad \forall x \in \mathfrak{g} \quad (6.23)$$

Lemma 6.13 (Satz von Engel). *Sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} und sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra von nilpotenten Endomorphismen von V (d.h. $\mathfrak{g} \subset \text{End}(V)$, $[x, y] \in \mathfrak{g} \forall x, y \in \mathfrak{g}$, $\forall x \in \mathfrak{g} \exists m : x^m = 0$). Dann gilt:*

(i) \mathfrak{g} ist eine nilpotente Lie-Algebra

(ii) $\exists v \in V$, $v \neq 0$ so dass $x(v) = 0 \forall x \in \mathfrak{g}$.

(iii) In einer geeigneten Basis von V sind alle $x \in \mathfrak{g}$ strikt obere Dreiecksmatrizen.

Bemerkungen. · Allerdings ist zu betonen, dass der Satz von Engel zwar die Umkehrung der Beobachtung ist, dass \mathfrak{g} nilpotent $\Rightarrow \mathfrak{g}$ ist ad-nilpotent, es aber dennoch nicht wahr ist, dass eine nilpotente Unter-Lie-Algebra von $\text{End}(V)$ notwendigerweise aus nilpotenten Endomorphismen besteht (siehe die diagonalen Matrizen).

· In der Folgerung des Satzes von Lie ist $v \cdot \mathbb{C}$ insbesondere ein invarianter Unterraum von (V, ρ) . Daher können wir ρ auf $V/(v \cdot \mathbb{C})$ projizieren und erhalten durch Wiederholung eine Basis von V in Bezug auf welche alle $\rho(x)$ obere Dreiecksmatrizen sind.

· Der Satz von Lie gilt im besonderen für die adjungierte Darstellung, aber erst nach Skalarerweiterung zu \mathbb{C} . (Falls die Aussage über \mathbb{R} gilt, so heisst \mathfrak{g} “split solvable” oder vollständig auflösbar.)

· Im Satz von Engel nehmen wir nicht an, dass der Basiskörper algebraisch abgeschlossen ist.

Beweis von Lemma 6.12. durch Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$.

· Für $\dim \mathfrak{g} = 1$ ist die Aussage äquivalent dazu, dass jeder Endomorphismus eines e.d. komplexen Vektorraums einen Eigenwert mit Eigenvektor besitzt: Das charakteristische Polynom

$$\det(\lambda \text{id}_V - \rho(x)) = 0 \quad (6.24)$$

hat eine Wurzel $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\exists v \in \text{Ker}(\lambda \text{id}_V - \rho(x))$, $v \neq 0$.

· Sei nun $\dim \mathfrak{g} > 1$ und nehme an, der Satz ist wahr für alle Lie-Algebren der $\dim < \dim \mathfrak{g}$. Betrachte die Kommutatoralgebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Da \mathfrak{g} auflösbar ist, gilt $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$. Sei \mathfrak{h} ein linearer Unterraum derart dass

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g} \quad \text{und} \quad \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1 \quad (6.25)$$

Wegen $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ ist \mathfrak{h} ein Ideal (und insbesondere eine Unter algebra) und auflösbar, da \mathfrak{g} auflösbar ist. $\rho|_{\mathfrak{h}}$ ist eine Darstellung von \mathfrak{h} und $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$. Daher existiert nach Induktionsvoraussetzung ein $w \in V$ und eine Funktion $\mu : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\rho(y)w = \mu(y)w \quad \forall y \in \mathfrak{h} \quad (6.26)$$

Sei dann $h \in \mathfrak{g}$ derart, dass $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{C} \cdot h$ (bzw. $\mathfrak{h} + \mathbb{R} \cdot h$) und betrachte den Unterraum $W \subset V$, der von

$$\{w, \rho(h)w, \rho(h)^2w, \dots\} \quad (6.27)$$

6.2. SÄTZE VON ENGEL UND LIE

aufgespannt wird. Da V endliche Dimension hat, existiert ein $k \geq 0$ derart dass

$$\{w, \rho(h)w, \dots, \rho(h)^k w\} \quad (6.28)$$

eine Basis von W ist. Offensichtlich ist W invariant unter $\rho(h)$.

Beh.: W ist invariant unter $\rho(\mathfrak{h})$ und $\rho(y)|_W = \mu(y) \text{id}_W \quad \forall y \in \mathfrak{h}$.

Wir beweisen zunächst die schwächere Aussage:

beh: W ist invariant unter $\rho(\mathfrak{h})$ und $\forall y \in \mathfrak{h}, l \leq k$ gilt

$$\rho(y)\rho(h)^l w = \mu(y)\rho(h)^l w \quad \text{mod } \langle \rho(h)^j w, j < l \rangle \quad (6.29)$$

bew: durch (endliche) Rekursion in l :

· Für $l = 0$ ist dies die Definition von h .

· Für $l > 0$ rechnen wir:

$$\begin{aligned} \rho(y)\rho(h)^l w &= \rho(h)\rho(y)\rho(h)^{l-1} w + \underbrace{\rho([y, h])}_{\in \mathfrak{h}} \rho(h)^{l-1} w \\ \text{(Rekursions-} &= \rho(h)\mu(y)\rho(h)^{l-1} w + \mu([y, h])\rho(h)^{l-1} w \quad \text{mod } \langle \rho(h)^j w, j < l \rangle \\ \text{voraussetzung)} &= \mu(y)\rho(h)^l w \quad \text{mod } \langle \rho(h)^j w, j < l \rangle \end{aligned} \quad (6.30)$$

Damit ist also W invariant unter $\rho(\mathfrak{h})$ und bzgl. der Basis (6.28) hat $\rho(y)$ für jedes $y \in \mathfrak{h}$ die obere Dreiecksform

$$\rho(y)|_W = \begin{pmatrix} \mu(y) & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \mu(y) \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

Dann aber gilt mit $[y, h] \in [\mathfrak{h}, h]$ statt y :

$$\begin{aligned} \mu([y, h]) \underbrace{\dim W}_{=k+1} &= \text{tr}_W \rho([y, h]) \\ &= \text{tr}_W [\rho(y), \rho(h)] = 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

also $\mu([y, h]) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{h}$. (Hier wird $\text{Char} = 0$ verwendet.) Zum

Bew.: der *Beh.* laufen wir den obigen *bew.* noch einmal mit dieser Zusatzinformation durch: Unter der Rekursionsannahme, dass

$$\rho(y)\rho(h)^{l-1} w = \mu(y)\rho(h)^{l-1} w \quad \forall y \in \mathfrak{h} \quad (6.33)$$

folgt dann die gleiche Aussage für $\rho(h)^l w$.

Zum Schluss benutzen wir, dass W invariant unter $\rho(h)$ ist, so dass $\rho(h)$ einen Eigenwert $\lambda(h)$ mit Eigenvektor $v \in W$ hat, $\rho(h)v = \lambda(h)v$. Dann gilt für jedes $\mathfrak{g} \ni x = y + \alpha h, y \in \mathfrak{h}, \alpha \in \mathbb{C}$ (oder \mathbb{R}):

$$\rho(x)v = \underbrace{(\mu(y) + \alpha\lambda(h))}_{=: \lambda(y+\alpha h)} v \quad (6.34)$$

Dies ist der gesuchte gemeinsame Eigenvektor in $\dim \mathfrak{g}$.

OEΔ

Beweis von Lemma 6.13. ebenfalls durch Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$.

- Für $\dim \mathfrak{g} = 1$ sind alle drei Aussagen aus der linearen Algebra bekannt.
- Für den Schritt zu $\dim \mathfrak{g} > 1$ nehmen wir an, dass alle drei Aussagen für alle Lie-Algebren von nilpotenten Endomorphismen e.d. Vektorräume der $\dim < \dim \mathfrak{g}$ gelten.

Wir suchen uns zunächst wieder eine geeignete Unteralgebra der Kodimension 1. Sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine maximale echte Unteralgebra von \mathfrak{g} , d.h. \mathfrak{h} ist eine Unteralgebra, $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ aber es existiert keine intermediäre Unteralgebra $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{i} \subsetneq \mathfrak{g}$.²

Beh.: $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$

Bew.: Da $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, wirkt \mathfrak{h} durch ad auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Für $y \in \mathfrak{h} \exists m$ sodass $y^m = 0 \in \text{End}(V)$. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{g}$ die Binomialformel (Induktion)

$$(\text{ad}_y)^{2m}(x) = \sum_{l=0}^{2m} (-1)^l \binom{2m}{l} y^l x y^{2m-l} = 0 \quad (6.35)$$

(da wenigstens immer ein Exponent $\geq m$ ist). Also ist $(\text{ad}_y)^{2m}$, d.h. \mathfrak{h} wird durch nilpotente Endomorphismen auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dargestellt. Da $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$ folgt $\dim \text{ad}_{\mathfrak{h}} < \dim \mathfrak{g}$ und daher existiert nach Induktionsvoraussetzung ein $h \in \mathfrak{g}$ mit nicht-trivialem Bild in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ so dass

$$\text{ad}_y(h) = 0 \pmod{\mathfrak{h}} \quad \forall y \in \mathfrak{h} \quad (6.36)$$

Dann ist $\mathfrak{h} + h \cdot \text{Basiskörper} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra von \mathfrak{g} und muss wegen der Maximalität von \mathfrak{h} gleich ganz \mathfrak{g} sein. \mathfrak{h} hat also Kodimension 1.

- Nun betrachten wir \mathfrak{h} und \mathfrak{g} wieder als die gegebenen Endomorphismen von V . Sei

$$W = \{w \in V, yw = 0 \forall y \in \mathfrak{h}\} \quad (6.37)$$

Nach Induktionsvoraussetzung (wegen $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$) ist W nicht-trivial. Ausserdem gilt $hW \subset W$ (denn $yhw = [y, h]w + hyw = 0$ falls $w \in W$, da \mathfrak{h} ein Ideal ist). Wir können also h auf W einschränken, wo es immer noch nilpotent wirkt. Daher ist 0 ein Eigenwert von $h|_W$ und $\exists v \in W, v \neq 0$ mit $hv = 0$. Dann ist $xv = 0 \forall x \in \mathfrak{g}$, und es gilt Aussage (ii) in der nächsthöheren Dimension.

- Aussage (iii) folgt dann durch Wiederholen des Arguments auf $V/(v \cdot \text{Basiskörper})$, und Aussage (i) aus (iii) und der Tatsache, dass eine Lie-Algebra von strikt oberen Dreiecksmatrizen nilpotent ist (siehe Beispiel 6.6). OEΔ

§ 6.3 Das Cartan-Kriterium

Unser Ziel ist weiterhin der Rückzug auf die einfachen bzw. halb-einfachen Lie-Algebren über \mathbb{C} .

²Eine solche maximale Unteralgebra mag nicht eindeutig sein, existiert aber auf jeden Fall: Sei d die maximale Dimension $< \dim \mathfrak{g}$, in der eine Unteralgebra von \mathfrak{g} existiert. Dann ist jede Unteralgebra der Dimension d maximal.

6.3. DAS CARTAN-KRITERIUM

6.3.1 Die Killing-Form

Lemma/Definition 6.14. Sei \mathfrak{g} eine (wie immer, endlich-dimensionale) Lie-Algebra über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Die Abbildung

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} \quad (6.38)$$

$$B(x, y) := \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}} \operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_y$$

ist eine symmetrische Bilinearform auf \mathfrak{g} . B ist ad-invariant in dem Sinne dass $\forall z \in \mathfrak{g}$,

$$B(\operatorname{ad}_z x, y) + B(x, \operatorname{ad}_z y) = 0 \quad (6.39)$$

und heisst Killing-Form auf \mathfrak{g} . (Wir schreiben auch $B_{\mathfrak{g}}$ falls mal mehrere Lie-Algebren eine Rolle spielen.)

Beweis/Erläuterung. · Für $x \in \mathfrak{g}$ ist $\operatorname{ad}_x \in \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ (siehe (4.31)) und $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}$ ist die Spur von Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

· Bilinearität ist klar, und Symmetrie folgt aus der zyklischen Invarianz der Spur, d.h.

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}} \operatorname{ad}_y \operatorname{ad}_x \quad (6.40)$$

Für die ad-Invarianz benutzen wir $\operatorname{ad}_{\operatorname{ad}_z x} = \operatorname{ad}_{[z, x]} = [\operatorname{ad}_z, \operatorname{ad}_x]$ (ad ist nämlich eine Darstellung von \mathfrak{g}). Daraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad}_{\operatorname{ad}_z x} \operatorname{ad}_y) + \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_{\operatorname{ad}_z y}) &= \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}([\operatorname{ad}_z, \operatorname{ad}_x] \operatorname{ad}_y) + \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad}_x [\operatorname{ad}_z, \operatorname{ad}_y]) \\ \left(\begin{array}{l} [\operatorname{ad}_z, \cdot] \text{ ist eine Derivation} \\ \text{der assoz. Algebra } \operatorname{End}(\mathfrak{g}) \end{array} \right) &= \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}[\operatorname{ad}_z, \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y] = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{zykl. Invarianz} \\ \text{der Spur} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (6.41)$$

OEΔ

Beispiel 6.15. (i) Für \mathfrak{g} abelsch ist $B \equiv 0$

(ii) Betrachte die 2-dimensionale auflösbare Lie-Algebra aus 5.5.2; $\mathfrak{g} = \langle x, y \rangle$ mit $[x, y] = x$. Bezüglich dieser Basis ist

$$\operatorname{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \operatorname{ad}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

und damit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (oder auch $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$) mit der Basis $\{h, e, f\}$ (s. (5.69))

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h \quad (6.43)$$

Die adjungierte Darstellung ist

$$\operatorname{ad}_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad}_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

und die Killing-Form

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

(iv) $\mathfrak{su}(2)$ mit der Basis x, y, z (siehe (5.71))

$$x = -\frac{i}{2}\sigma_x, \quad y = -\frac{i}{2}\sigma_y, \quad z = -\frac{i}{2}\sigma_z \quad (6.46)$$

$$\text{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

Diese Beispielen sollen die eingangs erwähnten Zusammenhänge zwischen Nicht-entartetheit von B und Halbeinfachheit von \mathfrak{g} sowie zwischen Definitheit von B und Kompaktheit der zu \mathfrak{g} gehörigen Gruppe illustrieren.

6.3.2 Jordansche Normalform und Jordan-Zerlegung

Wir wiederholen zuerst die Aussage, die in jedem Fall aus der linearen Algebra bekannt sein sollte.

Proposition 6.16. *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{C} und $x \in \text{End}(V)$. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von x , d.h. die (verschiedenen) Wurzeln des charakteristischen Polynoms:*

$$\det(x - \lambda \cdot \text{id}_V) = \prod_{j=1}^k (\lambda_j - \lambda)^{m_j} \quad (6.49)$$

Dann existieren Zerlegungen der Multiplizitäten $m_j \in \mathbb{N}$,

$$m_j = \sum_{i=1}^{l_j} m_{ji}, \quad j = 1, \dots, k \quad (6.50)$$

und eine Basis von V , in der x die folgende Form hat

$$x = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_{11}) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J(\lambda_1, m_{1l_1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J(\lambda_k, m_{kl_k}) \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

6.3. DAS CARTAN-KRITERIUM

mit den $m \times m$ Jordan-Blöcken

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

Beweisideen. Die wiederholte Anwendung von 6.12 liefert ja bereits die obere Dreiecksform

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

Um den oberen Teil zu zerblocken, definiert man für $j = 1, \dots, k$ den verallgemeinerten Eigenraum

$$V_j := \text{Ker}(x - \lambda_j)^{m_j} \quad (6.54)$$

und zeigt

$$\begin{aligned} x(V_j) &\subset V_j && \text{(trivial)} \\ V &= \bigoplus_{j=1}^k V_j && \left(\begin{array}{l} \text{folgt aus der Teilerfremdheit der} \\ (x - \lambda_j)^{m_j} \text{ im Polynomring, s.u.} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (6.55)$$

Zuletzt konstruiert man dann die Blockstruktur in jedem V_j , d.h. man nimmt als Basis

$$\begin{aligned} &\{0 \neq w_1 \in \text{Ker}(x - \lambda_j)^{m_{j1}}, (x - \lambda_j)w_1, (x - \lambda_j)^2w_1, \dots, \text{Ker}(x - \lambda_j)^{m_{j1}-1}, \\ &0 \neq w_2 \in \text{Ker}(x - \lambda_j)^{m_{j2}}, \dots \\ &\vdots \\ &w_{l_j} \in \text{Ker}(x - \lambda_j)^{m_{jl_j}}, \dots, \dots \text{ (bis dim } V_j \text{ erreicht)}\} \end{aligned} \quad (6.56)$$

OEΔ

Etwas abstrakter sagen wir verschärft so:

Proposition 6.17. *Seien V, x wie oben. Dann gilt:*

(i) *Es existiert eine eindeutige Jordan-Zerlegung*

$$x = s + n \quad (6.57)$$

mit $s, n \in \text{End}(V)$, s diagonalisierbar ("halb-einfach"), n nilpotent und $[s, n] = 0$.

(ii) *Es existiert ein Polynom in einer Variablen ohne konstanten Term $p(T) \in T\mathbb{C}[T]$ mit $s = p(x)$. (Und $n = x - p(x)$ ist dann auch polynomial in x .)*

(iii) *Falls $y \in \text{End}(V)$ mit $[y, x] = 0$, so gilt auch $[y, s] = [y, n] = 0$.*

Beweisskizze. (i) Existenz folgt aus der Proposition 6.16: Schreiben wir wie dort

$$V = \bigoplus_{j=1}^k V_j, \quad V_j = \text{Ker}(x - \lambda_j)^{m_j} \quad (6.58)$$

so erfüllen

$$s = \bigoplus_{j=1}^k \lambda_j \text{id}_{V_j} \quad (6.59)$$

und $n = x - s$ die verlangten Bedingungen. Zur Eindeutigkeit kommen wir gleich.

(ii) Die Bedingungen an p lauten

$$p(x)|_{V_j} = \lambda_j \quad (6.60)$$

welche erfüllt sind, falls p den Kongruenzen

$$p(T) = \lambda_j \text{ mod } (T - \lambda_j)^{m_j} \quad (6.61)$$

genügt, sowie ausserdem $p(T) = 0 \text{ mod } T$. (Es sei denn, das Fehlen des konstanten Terms wird bereits durch ein $\lambda_j = 0$ erzwungen.)

· Die Existenz eines solchen p s folgt aus dem Chinesischen Restsatz³ im Polynomring $\mathbb{C}[T]$ bezüglich den paarweise teilerfremden Idealen $I_j = (T - \lambda_j)^{m_j} \mathbb{C}[T]$.

(iii) folgt trivial aus (ii), und daraus zuletzt die Eindeutigkeit der Zerlegung: Falls $x = s' + n'$ eine weitere Zerlegung ist mit s' halb-einfach, n' nilpotent und $[s', n'] = 0$, so kommutiert s' mit $x = s' + n'$ und daher nach (iii) auch mit s . Also ist $s - s' = n - n'$ sowohl halb-einfach als auch nilpotent, daher 0. OEΔ

Korollar 6.18 (des Beweises). *Sei $\tilde{s} \in \text{End}(V)$ halb-einfach mit den gleichen Eigenräumen wie s , aber evtl. anderen Eigenwerten $\tilde{\lambda}_j$. Dann existiert ein $\tilde{p} \in T \mathbb{C}[T]$ mit*

$$\tilde{p}(x) = \tilde{s} \quad (6.62)$$

Beweis. Ersetze in (6.61) die λ_j durch die $\tilde{\lambda}_j$. Der CRS benutzt, dass die I_j koprim sind, d.h. die λ_j müssen verschieden sein, aber nicht unbedingt die $\tilde{\lambda}_j$. OEΔ

6.3.3 Der ‘harte Kern’

Lemma 6.19. *Sei \mathfrak{g} eine komplexe Lie-Algebra, und sei für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$*

$$B(x, [y, z]) := \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}_x \text{ad}_{[y, z]}) = 0 \quad (*) \quad (6.63)$$

*Dann ist für alle $u, v \in \mathfrak{g}$ $\text{ad}_{[u, v]} \in \text{End}(\mathfrak{g})$ nilpotent.*⁴

Beweis. Wir fixieren $u, v \in \mathfrak{g}$ und definieren $t := \text{ad}_{[u, v]} \in \text{End}(\mathfrak{g})$. Dieser Endomorphismus hat eine Jordan-Zerlegung (s. Prop. 6.17)

$$t = s + n \quad s, n \in \text{End}(\mathfrak{g}), \text{ halb-einfach, nilpotent}^5 \quad (6.64)$$

³Siehe irgendein Lehrbuch der Algebra.

⁴Next time, formulate this lemma for all representations of \mathfrak{g} !!!

6.3. DAS CARTAN-KRITERIUM

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von s und

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^k V_j \quad (6.65)$$

die Eigenraumzerlegung. Sei $\bar{s} \in \text{End}(\mathfrak{g})$ definiert durch $\bar{s}|_{V_j} = \bar{\lambda}_j$ (komplexe Konjugation!). Dann ist \bar{s} halb-einfach, kommutiert mit s und n und es gilt

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathfrak{g}} \bar{s}t &= \text{tr}_{\mathfrak{g}} \left(\bar{s}s + \underbrace{\bar{s}n}_{\text{nilpotent}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^k |\lambda_j|^2 \cdot \dim V_j \end{aligned} \quad (6.66)$$

Beh.: Aus (*) folgt $\text{tr}_{\mathfrak{g}} \bar{s}t = 0$, was nur möglich ist, falls alle $\lambda_j = 0$, d.h. $s = 0$ und t nilpotent ist.

Bew.: Wegen $t = \text{ad}_{[u,v]} = [\text{ad}_u, \text{ad}_v]$ gilt

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathfrak{g}} \bar{s}t &= \text{tr}_{\mathfrak{g}} (\bar{s} \text{ad}_u \text{ad}_v - \bar{s} \text{ad}_v \text{ad}_u) \\ &= \text{tr}_{\mathfrak{g}} ([\bar{s}, \text{ad}_u] \text{ad}_v) \\ &= \text{tr}_{\mathfrak{g}} (\text{aD}_{\bar{s}}(\text{ad}_u) \text{ad}_v) \end{aligned} \quad (6.67)$$

wo $\text{aD} : \text{End}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(\text{End}(\mathfrak{g}))$ die "adjungierte Darstellung" von $\text{End}(\mathfrak{g})$ auf sich selbst ist.

· Nun drücken wir $\text{aD}_{\bar{s}}$ durch aD_t aus. Der Zerlegung (6.64) folgend, schreiben wir

$$\text{aD}_t = \text{aD}_s + \text{aD}_n \in \text{End}(\text{End}(\mathfrak{g})) \quad (6.68)$$

und stellen fest, dass mit (6.65)

$$\text{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \bigoplus_{i,j} V_i \otimes V_j^* \quad (6.69)$$

schon die Eigenraumzerlegung von aD_s ist (zum Vorzeichen siehe (6.4))

$$\text{aD}_s |_{V_i \otimes V_j^*} = \lambda_i - \lambda_j \quad (6.70)$$

aD_s ist also halbeinfach. Wie im Beweis von Theorem 6.13 ist aD_n nilpotent, da n nilpotent ist. (Unter Umständen muss die Potenz verdoppelt werden, s. (6.35).) Ausserdem ist natürlich $[\text{aD}_s, \text{aD}_n] = \text{aD}_{[s,n]} = 0$. Die Gleichung (6.68) gibt also die (eindeutige) Jordan-Zerlegung von $t \in \text{End}(\text{End}(\mathfrak{g}))$. Da

$$\text{aD}_{\bar{s}} |_{V_i \otimes V_j^*} = \bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j \quad (6.71)$$

die gleichen Eigenräume hat wie t , folgt aus Korollar 6.18 die Existenz eines Polynoms $p \in T\mathbb{C}[T]$ mit

$$\text{aD}_{\bar{s}} = p(\text{aD}_t) \quad (6.72)$$

⁵Aber nicht unbedingt a priori in $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$!

Eingesetzt in (6.67) genügt es also zu zeigen, dass $\forall l > 0$

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}_t)^l(\mathrm{ad}_u) \mathrm{ad}_v) = 0 \quad (6.73)$$

gilt. Mit $w := [u, v]$ ist $t = \mathrm{ad}_w$ und dann

$$\begin{aligned} (\mathrm{ad}_t)^l(\mathrm{ad}_u) &= \underbrace{[\mathrm{ad}_w, [\mathrm{ad}_w, \dots, [\mathrm{ad}_w, \mathrm{ad}_u] \dots]]}_{l \text{ Mal}} \\ &= [\mathrm{ad}_w, [\mathrm{ad}_w, \dots, \mathrm{ad}_{[w,u]} \dots]] \\ &= \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_w^l(u)} = \mathrm{ad}_{[w, \mathrm{ad}_w^{l-1}(u)]} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{hier geht } l > 0 \text{ ein} \end{aligned} \quad (6.74)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}_t)^l(\mathrm{ad}_u) \mathrm{ad}_v) &= \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{[w, \mathrm{ad}_w^{l-1}(u)]} \mathrm{ad}_v) \\ &= 0 \quad \text{nach Voraussetzung } (*) \end{aligned} \quad (6.75)$$

(Denn es sind ja w und $\mathrm{ad}_w(u)$ in \mathfrak{g} .) Es folgt die *Beh.* und damit ist das Lemma bewiesen. OEA

6.3.4 Auflösbarkeit und Halbeinfachheit

Proposition 6.20. *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Dann ist \mathfrak{g} genau dann auflösbar, wenn $\forall x \in \mathfrak{g}$ und $w \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ gilt, dass*

$$B(x, w) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w = 0 \quad (6.76)$$

Beweis. · Für eine reelle Lie-Algebra \mathfrak{g} gilt (siehe (6.12))

$$\mathfrak{g} \text{ auflösbar} \Leftrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \text{ auflösbar} \quad (6.77)$$

$$B_{\mathfrak{g}}(x, w) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}, w \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \Leftrightarrow B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(x, w) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, w \in [\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}]$$

Daher genügt es, die Aussage über \mathbb{C} zu zeigen.

“ \Rightarrow ”: Gemäss dem Lemma 6.19 folgt aus $B(x, w) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$, dass für alle $w \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ $\mathrm{ad}_w \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ nilpotent ist. Daher ist nach dem Satz von Engel 6.13 $\mathrm{ad}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ eine nilpotente Unter algebra von $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

· Sei $\mathfrak{h} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Es existiert ein l so dass $\mathfrak{h}_l = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} \underbrace{[\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}, [\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}, [\dots, [\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}] \dots]]]}_{l \text{ mal}} &= 0 \in \mathrm{End}(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ &= \mathrm{ad}_{\underbrace{[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, [\dots, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \dots]]]}_{l \text{ mal}}} \end{aligned} \quad (6.78)$$

M.a.W.

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{ad}_{\underbrace{[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, [\dots, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \dots]]]}_{l \text{ mal}}}(\mathfrak{h}) \\ &= \underbrace{[[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, [\dots, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \dots]]], \mathfrak{h}]}_{l \text{ mal}} \\ &= \underbrace{[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, [\dots, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \dots]]]]}_{l+1 \text{ mal}} \end{aligned} \quad (6.79)$$

6.4. FOLGERUNGEN UND ERGÄNZUNGEN

Also ist $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent, und daher \mathfrak{g} auflösbar.

“ \Leftarrow ”: Sei umgekehrt \mathfrak{g} auflösbar. Dann existiert nach dem Satz von Lie 6.12 eine Basis von \mathfrak{g} bezüglich derer $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ obere Dreiecksform hat. Dann hat $\text{ad}_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = [\text{ad}_{\mathfrak{g}}, \text{ad}_{\mathfrak{g}}]$ strikt obere Dreiecksform in dieser Basis und dies impliziert $B(x, w) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}, w \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. OEΔ

Theorem 6.21. *Sei \mathfrak{g} eine e.d. Lie-Algebra über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Dann ist \mathfrak{g} genau dann halb-einfach, falls die Killing-Form nicht-entartet ist, d.h.*

$$B(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g} \Rightarrow x = 0 \quad (6.80)$$

Beweis. “ \Rightarrow ” Wenn \mathfrak{g} nicht halb-einfach ist, dann ist $\mathfrak{r} = \text{rad } \mathfrak{g}$ ein nicht-triviales auflösbares Ideal. Dann existiert ein j so dass $\mathfrak{r}^j = 0$, aber $\mathfrak{a} := \mathfrak{r}^{j-1} \neq 0$ (Kommutator-Folge). $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$, \mathfrak{a} ist also ein nicht-triviales abelsches Ideal. Sei \mathfrak{s} ein komplementärer Unterraum (d.h. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ als Vektorraum). Dann haben für $0 \neq x \in \mathfrak{a}$ und $y \in \mathfrak{g}$ die adjungierten die Form

$$\text{ad}_x = \begin{matrix} \mathfrak{a} & \\ \mathfrak{s} & \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ad}_y = \begin{matrix} \mathfrak{a} & \\ \mathfrak{s} & \end{matrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad (6.81)$$

Es folgt $\text{tr}_{\mathfrak{g}} \text{ad}_x \text{ad}_y = 0$, also ist B entartet.

“ \Leftarrow ” Sei umgekehrt B entartet und

$$\mathfrak{a} := \{x \in \mathfrak{g}, B(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\} \quad (6.82)$$

der “Kern” von B . Dann ist $\mathfrak{a} \neq 0$ und wegen der ad-Invarianz von B ist \mathfrak{a} ein Ideal:

$$B([z, x], y) = -B(x, [z, y]) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g} \quad (6.83)$$

Zum Nachweis der Auflösbarkeit von \mathfrak{a} benutzen wir das Cartan-Kriterium, Prop. 6.20. Für $x \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ hat ad_x die Form

$$\text{ad}_x = \begin{matrix} \mathfrak{a} & \\ \mathfrak{s} & \end{matrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.84)$$

Daher (oder als getrenntes Lemma....) gilt für $x, y \in \mathfrak{a}$:

$$B_{\mathfrak{a}}(x, y) = \text{tr}_{\mathfrak{a}} \text{ad}_x|_{\mathfrak{a}} \circ \text{ad}_y|_{\mathfrak{a}} = \text{tr}_{\mathfrak{g}} \text{ad}_x \circ \text{ad}_y \quad (6.85)$$

Insbesondere ist $B_{\mathfrak{a}}(x, y) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{a}, y \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. Daher ist nach dem Cartan-Kriterium \mathfrak{a} auflösbar, und \mathfrak{g} ist nicht halb-einfach.⁶ OEΔ

§ 6.4 Folgerungen und Ergänzungen

Die Nicht-Entartetheit der Killing-Form für halb-einfache Lie-Algebren eröffnet eine ganze Reihe von Konsequenzen und Querverbindungen, von denen wir in diesem § noch einige wichtige beleuchten wollen.

⁶Die Tatsache, dass für das Ideal \mathfrak{a} die stärkere Aussage $B(x, y) = 0 \ \forall x, y \in \mathfrak{a}$ gilt, zeigt, dass das Radikal von \mathfrak{g} grösser sein kann als der Kern von B . Vgl. Beispiel (ii), (6.42)

6.4.1 Derivationen

Erinnerung. Eine *Derivation* einer Lie-Algebra \mathfrak{g} ist (ein infinitesimaler Automorphismus, d.h.) eine lineare Abbildung $\delta \in \text{End}(\mathfrak{g})$ so dass

$$\delta[x, y] = [\delta x, y] + [x, \delta y] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad (6.86)$$

\uparrow Klammer in \mathfrak{g}

eine Gleichung, die wir auch als

$$[\delta, \text{ad}_x] = \text{ad}_{\delta(x)} \quad (6.87)$$

\uparrow Klammer in $\text{End}(\mathfrak{g})$

schreiben können, und für $\delta = \text{ad}_z$ als Ausdruck der Tatsache erkannt hatten, dass

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \subset \text{End}(\mathfrak{g}) \quad (6.88)$$

eine Darstellung von \mathfrak{g} ist (siehe Gl. (6.1)).

Es stellt sich die natürliche Frage, inwieweit ad injektiv (treu) und surjektiv ist.
 · Zunächst einmal ist natürlich

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\text{ad}) &= \{x, \text{ad}_x(y) = [x, y] = 0 \forall y\} \\ &= Z_{\mathfrak{g}} \quad (\text{das Zentrum von } \mathfrak{g}) \end{aligned} \quad (6.89)$$

und da $Z_{\mathfrak{g}}$ ein abelsches (also auflösbares) Ideal ist, ist $\text{Ker}(\text{ad}) = 0$ falls \mathfrak{g} halbeinfach ist. Die Umkehrung gilt wohlgerne nicht. Z.B. hat die auflösbare Lie-Algebra der spurlosen oberen Dreiecksmatrizen triviales Zentrum. Eine nilpotente Lie-Algebra hat hingegen immer nicht-triviales Zentrum, sodass man zur Konstruktion einer treuen Darstellung einer nilpotenten Lie-Algebra etwas arbeiten muss.

· Zur Beantwortung der Frage nach der Surjektivität führen wir den folgenden Begriff ein.

Definition 6.22. Eine Derivation δ heisst *innere Derivation* falls $\delta \in \text{ad}_{\mathfrak{g}}$, d.h. $\delta = \text{ad}_z$ für ein $z \in \mathfrak{g}$.

Theorem 6.23. Sei \mathfrak{g} halbeinfach. Dann sind alle Derivationen von \mathfrak{g} inner, d.h. es folgt $\text{ad}_{\mathfrak{g}} = \text{Der}(\mathfrak{g})$.

Beweis. Die Killing-Form $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} ist nach Theorem 6.21 nicht-entartet und vermittelt daher, wie aus der linearen Algebra bekannt, einen Vektorraum-Isomorphismus $\mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}^*$ (B nicht-entartet ist nämlich äquivalent dazu, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \ni x &\mapsto x^b \in \mathfrak{g}^* \\ x^b(y) &= B(x, y) \end{aligned} \quad (6.90)$$

trivialen Kern hat. Wegen der endlichen Dimension ist dann $\mathfrak{g}^b = \mathfrak{g}^*$.)

· Daher existiert zur Linearform

$$\mathfrak{g} \ni y \mapsto \text{tr}_{\mathfrak{g}} \delta \text{ad}_y \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} \quad (6.91)$$

ein eindeutiges $z \in \mathfrak{g}$ mit

$$\text{tr}_{\mathfrak{g}}(\delta \circ \text{ad}_y) = B(z, y) \quad \forall y \in \mathfrak{g} \quad (6.92)$$

6.4. FOLGERUNGEN UND ERGÄNZUNGEN

Beh.: $\delta = \text{ad}_z$, d.h. $\delta(x) = \text{ad}_z(x) \forall x \in \mathfrak{g}$

Bew.: Wir zeigen

$$B(\delta(x), y) = B([z, x], y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad (6.93)$$

Wegen der Nicht-Entartetheit von B ergibt sich daraus die Behauptung. Unter Benutzung von (6.87) gilt nun

$$\begin{aligned} B(\delta(x), y) &= \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}_{\delta(x)} \text{ad}_y) \\ &= \text{tr}_{\mathfrak{g}}([\delta, \text{ad}_x] \text{ad}_y) \\ &= \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\delta \circ [\text{ad}_x, \text{ad}_y]) \\ &= \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\delta \circ \text{ad}_{[x, y]}) = (\text{Def. von } z) \\ &= B(z, [x, y]) = (\text{ad-Invarianz von } B) \\ &= -B([x, z], y) \end{aligned} \quad (6.94)$$

also (6.93).

OEΔ

Bemerkungen. · Falls \mathfrak{g} nicht halb-einfach ist, so gibt es im allgemeinen Derivationen, welche nicht innere sind. Z.B. ist für $\mathfrak{g} = x \cdot \mathbb{C}$ ein-dimensional $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \text{End}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}$ aber $\text{ad}_{\mathfrak{g}} = 0$.

· Andererseits ist aber $\text{ad}_{\mathfrak{g}} = \text{Der}(\mathfrak{g})$ auch nicht hinreichend für Halbeinfachheit. Betrachte z.B. die auflösbare Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$ mit $[x, y] = y$ aus Punkt 5.5.2: Für jede Derivation δ von \mathfrak{g} muss $\delta y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sein und da $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{C} \cdot y$, existiert dann ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$\delta y = \alpha y \quad (6.95)$$

Schreiben wir dann $\delta x = \beta x + \gamma y$ für $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ und untersuchen die nicht-triviale Klammer, so finden wir die Gleichung

$$\alpha y = [\beta x + \gamma y, y] + [x, \alpha y] = \beta y + \alpha y \quad (6.96)$$

aus der $\beta = 0$ folgt. Das Ergebnis

$$\delta y = \alpha y, \quad \delta x = \gamma y \quad (6.97)$$

stimmt aber mit

$$\text{ad}_z = \alpha \text{ad}_x - \gamma \text{ad}_y \quad (6.98)$$

überein. Es gilt also in diesem Fall auch $\text{ad}_{\mathfrak{g}} = \text{Der}(\mathfrak{g})$.

6.4.2 Abstrakte Jordan-Zerlegung

Für die Darstellungstheorie ist noch das folgende Korollar aus Theorem 6.21 nützlich.

Theorem/Definition 6.24. Sei \mathfrak{g} eine halb-einfache Lie-Algebra über \mathbb{C} . Für $x \in \mathfrak{g}$ sei

$$\text{ad}_x = (\text{ad}_x)_s + (\text{ad}_x)_n \quad (6.99)$$

die Jordan-Zerlegung von $\text{ad}_x \in \text{End}(\mathfrak{g})$. Dann existieren eindeutige $s, n \in \mathfrak{g}$ mit $[s, n] = 0$ und $\text{ad}_s = (\text{ad}_x)_s$, $\text{ad}_n = (\text{ad}_x)_n$.

$$x = s + n \quad (6.100)$$

heißt absolute (oder abstrakte) Jordan-Zerlegung von x .

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $(\text{ad}_x)_s$ eine Derivation von \mathfrak{g} ist. (Existenz von s und n folgt dann aus Theorem 6.23. $[s, n] = 0$ und Eindeutigkeit folgt aus $\text{Ker}(\text{ad}) = 0$.)

· Sei dazu $\mathfrak{g} = \bigoplus V_j$ die Zerlegung von \mathfrak{g} in verallgemeinerte Eigenräume von ad_x . Die “eigentliche” Definition ist zwar

$$V_j = \text{Ker}(\text{ad}_x - \lambda_j)^{m_j} \quad (6.101)$$

wobei m_j die Multiplizität des Eigenwertes λ_j von ad_x ist. Allgemeiner gilt aber auch $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\text{Ker}(\text{ad}_x - \lambda_j)^n \subseteq V_j \quad (6.102)$$

mit Gleichheit sobald $n \geq m_j$, sowie

$$\text{Ker}(\text{ad}_x - \lambda)^n = 0 \quad (6.103)$$

$\forall n$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$, welche keine Eigenwerte von ad_x sind. Aus dem

Lemma 6.25. Für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $y, z \in \mathfrak{g}$ gilt

$$(\text{ad}_x - \lambda_j - \lambda_k)^n [y, z] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [(\text{ad}_x - \lambda_j)^i y, (\text{ad}_x - \lambda_k)^{n-i} z] \quad (6.104)$$

folgt für $y \in V_j$ und $z \in V_k$ mit $n = m_j + m_k$,

$$[y, z] \in V_l \quad (6.105)$$

falls $\lambda_l := \lambda_j + \lambda_k$ ein Eigenwert von ad_x ist, und 0 andernfalls. (In (6.104) ist entweder $i \geq m_j$ oder $n - i \geq m_k$.) Jedenfalls gilt

$$(\text{ad}_x)_s [y, z] = (\lambda_j + \lambda_k) [y, z] \quad (6.106)$$

und da $(\text{ad}_x)_s y = \lambda_j y$ und $(\text{ad}_x)_s z = \lambda_k z$ folgt

$$(\text{ad}_x)_s [y, z] = [(\text{ad}_x)_s y, z] + [y, (\text{ad}_x)_s z] \quad (6.107)$$

zunächst für $y \in V_j$, $z \in V_k$ und wegen Linearität dann $\forall y, z \in \mathfrak{g}$. Also ist $(\text{ad}_x)_s \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ und der Beweis hängt nur noch am Lemma 6.25 OEΔ

Beweis von Lemma 6.25. durch Induktion in n : $n = 0$ ist klar, für $n \Rightarrow n+1$ rechnen wir

$$\begin{aligned} & (\text{ad}_x - \lambda_j - \lambda_k) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [(\text{ad}_x - \lambda_j)^i y, (\text{ad}_x - \lambda_k)^{n-i} z] \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left([(\text{ad}_x - \lambda_j)^{i+1} y, (\text{ad}_x - \lambda_k)^{n-i} z] + [(\text{ad}_x - \lambda_j)^i y, (\text{ad}_x - \lambda_k)^{n-i+1} z] \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} [(\text{ad}_x - \lambda_j)^i y, (\text{ad}_x - \lambda_k)^{n+1-i} z] \underbrace{\left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right)}_{= \binom{n+1}{i}} \end{aligned} \quad (6.108)$$

OEΔ

6.4. FOLGERUNGEN UND ERGÄNZUNGEN

6.4.3 Zerlegbarkeit der adjungierten Darstellung

Von den am Anfang des Kapitels eingeführten Begriffen haben wir den der einfachen Lie-Algebra, Def. 6.2 und den der reduktiven Lie-Algebra, Def. 6.3 noch nicht weiter benutzt. Dem wollen wir nun abhelfen, indem wir insbesondere den Zusammenhang zu den halb-einfachen Lie-Algebren herstellen.

· Für jede Lie-Algebra \mathfrak{g} ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ein Ideal, welches nicht null ist genau dann, wenn \mathfrak{g} nicht abelsch ist. Daher gilt für \mathfrak{g} einfach

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g} \quad (6.109)$$

· Sind nun \mathfrak{g} und \mathfrak{h} halb-einfache Lie-Algebren, so ist das Produkt (*i.e.*, die direkte Summe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ mit Lie-Klammer $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$), ebenfalls halb-einfach. Dies folgt z.B. besonders bequem mit dem Cartan-Kriterium aus der Tatsache, dass

$$B_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}} = B_{\mathfrak{g}} + B_{\mathfrak{h}} \quad (6.110)$$

in dem Sinne, dass $B_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}}(x, y) = 0$ für $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}$, dass also $B_{\mathfrak{g}}, B_{\mathfrak{h}}$ nicht-entartet $\Leftrightarrow B_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}}$ nicht-entartet. [Der direkte algebraische Weg ist aber gar nicht umständlicher: Falls $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ ein auflösbares Ideal ist, so gilt mit $\mathfrak{a} := \mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b} := \mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}$, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ und wegen

$$\mathfrak{c}^1 = [\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}] = \mathfrak{a}^1 \oplus \mathfrak{b}^1 \quad (6.111)$$

etc. müssen $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{h}$ bereits auflösbare Ideale sein. Also ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 0$.]

· Insbesondere ist also das Produkt

$$\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m \quad (6.112)$$

einfacher Lie-Algebren $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_m$ halb-einfach.

· Sei umgekehrt \mathfrak{g} halb-einfach und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein nicht-triviales Ideal. Sei \mathfrak{a}^\perp das orthogonale Komplement von \mathfrak{a} bezüglich der Killing Form

$$\mathfrak{a}^\perp := \{B(x, y) = 0 \forall y \in \mathfrak{a}\} \quad (6.113)$$

Da B nach (6.39) ad-invariant ist, ist \mathfrak{a}^\perp auch ein Ideal und damit $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ ebenfalls. Zwar können wir nicht sofort $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$ (und daraus $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp = \mathfrak{g}$) folgern, da B (zwar nicht-entartet, aber) nicht unbedingt definit ist. Allerdings ist (siehe Gl. (6.85)) am Ende des Beweises von Theorem 6.21) die Killing-Form auf (jedem Ideal, insbesondere) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ die Einschränkung derer auf \mathfrak{g} :

$$B_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp} = B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp} = 0 \quad (6.114)$$

Also ist nach Prop. 6.20 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ auflösbar, muss also wegen der Halbeinfachheit von \mathfrak{g} gleich 0 sein. Es folgt dann also doch

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp \quad (6.115)$$

zunächst als Vektorraum und dann auch als Produkt von Lie-Algebren (Übung!) und nach dem Cartan-Kriterium müssen \mathfrak{a} und \mathfrak{a}^\perp auch wieder halb-einfach sein. Auf

diese Weise finden wir also, dass für \mathfrak{g} endlich-dimensional und halb-einfach einfache Lie-Algebren $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_m$ existieren, welche eindeutig sind bis auf Permutation, mit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m \quad (6.116)$$

Insbesondere folgt also aus \mathfrak{g} halb-einfach, dass $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Dies ist aber auch wieder nicht hinreichend:

Beispiel 6.26. Sei \mathfrak{g} einfach und $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ eine irreduzible Darstellung (wir werden sehen, dass so etwas existiert!). Dann definieren wir das semi-direkte Produkt (vgl. 6.19)

$$V \rightarrow \mathfrak{g} \oplus_{\rho} V \rightarrow \mathfrak{g} \quad (6.117)$$

via

$$[(x, v), (y, w)] := ([x, y], \rho(x)w - \rho(y)v) \quad (6.118)$$

Dann ist

$$(\mathfrak{g}, 0) = ([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], 0) = [(\mathfrak{g}, 0), (\mathfrak{g}, 0)] \subset [\mathfrak{g} \oplus_{\rho} V, \mathfrak{g} \oplus_{\rho} V] \quad (6.119)$$

und

$$[(\mathfrak{g}, 0), (0, V)] = (0, \rho(\mathfrak{g})V) \quad (6.120)$$

wäre $\rho(\mathfrak{g})V \neq V$ so müsste die Unterdarstellung $\rho(\mathfrak{g})V \subset V$ trivial sein, da ρ irreduzibel sein. Dann aber wäre ρ trivial.⁷ Also ist $\mathfrak{g} \oplus_{\rho} V = [\mathfrak{g} \oplus_{\rho} V, \mathfrak{g} \oplus_{\rho} V]$, aber nicht halb-einfach.

· (6.116) ist die Aussage, dass halb-einfache Lie-Algebren reduktiv sind. Bei der Umkehrung gibt es noch eine kleine Komplikation:

Theorem 6.27. *Sei \mathfrak{g} eine reduktive Lie-Algebra. Dann ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ halb-einfach und*

$$\mathfrak{g} = \underbrace{Z_{\mathfrak{g}}}_{\text{Zentrum von } \mathfrak{g}} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad (6.121)$$

Beweis. Reduktiv heisst: Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ existiert ein komplementäres Ideal \mathfrak{a}' sodass $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}'$ (zunächst als Vektorraum, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'] = 0$ folgt dann automatisch). Sein nun

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_m \quad (6.122)$$

die Faktorisierung in irreduzible Ideale. Dann gilt entweder $\dim \mathfrak{a}_i = 1$ oder \mathfrak{a}_i ist einfach, oBdA ersteres für $i = 1, \dots, k$. Also gilt

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_k}_{= Z_{\mathfrak{g}}} \oplus \underbrace{\mathfrak{a}_{k+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_m}_{\text{halb-einfach}} \Rightarrow = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad (6.123)$$

OEΔ

⁷Die Auflösung der nicht-trivialen Homonymie sei dem Leser überlassen.

6.4.4 Exkurs in die Geometrie

Dieser Unterabschnitt könnte einer der interessantesten, wenn auch vielleicht nicht der zentralen, Punkte der gesamten Vorlesung sein, verbindet er doch in nicht-trivialer Weise viele der algebraischen und geometrischen Ideen, die wir seit dem Anfang des Semester kennengelernt haben.

· Die Hauptstoßrichtung ist die Rückkehr zum Standpunkt der Gruppe, welcher alle unsere Anstrengungen eigentlich rechtfertigt. Allerdings entwickeln wir hier nur, in Fortsetzung von 4.2.1, etwas Integrationstheorie auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, und wenden sie dann, als kontinuierliches Analogon der “Mittelung über die Gruppe” aus § 2.2 auf die Struktur- und evtl. die Darstellungstheorie kompakter Lie-Algebren an. Wir wiederholen zunächst schlaglichtartig etwas Information zum Integralbegriff.

· In der Analysis lernt man das Integral kennen als lineares Funktional

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f d^n x \quad (6.124)$$

vom (Vektor-)Raum der integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nach \mathbb{R} . Integrierbar sind insbesondere glatte Funktionen mit kompaktem Träger, welche unser Interesse im Folgenden voll erschöpfen.

· Eine der zentralen Eigenschaften des Integrals ist die *Substitutionsregel*: Falls $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(\Phi(y))}_{=(\Phi^* f)(y)} |\det D\Phi| d^n y \quad (6.125)$$

wo $D\Phi = \left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial y^i}\right)$ die Jacobi-Matrix ist. Insbesondere gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi^*(f) d^n x \quad (6.126)$$

$\forall f$ falls Φ affin projektiv speziell linear ist. Translationsinvarianz ist sogar eine der möglichen Charakterisierungen des Lebesgue-Masses, welches damit für uns ein erstes Beispiel für ein Haarsches Mass wäre (auf der abelschen topologischen Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$).

· Im Zusammenhang mit dem Stokesschen Satz (in dem man i.A. über niederdimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n integrieren möchte) lernt man $f d^n x$ als Ausdruck der Differentialform

$$\omega = \pm f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (6.127)$$

bezüglich einer bevorzugten Orientierung des \mathbb{R}^n zu interpretieren, die Vorschrift

$$\Phi^* \omega = \pm f \circ \Phi \det D\Phi dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \quad (6.128)$$

als “Pullback von ω under dem Kartenwechsel Φ ”, und die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\Phi^{-1}(\mathbb{R}^n)} \Phi^* \omega \quad (6.129)$$

als “Invarianz des Integrals unter (orientiertem) Kartenwechsel”.

· In der Differentialgeometrie führt man schliesslich zunächst abstrakt Differentialformen vom Grad k auf einer Mannigfaltigkeit M ein als

$$\omega \in \Omega^k(M) = \wedge^k T^*M \quad (6.130)$$

Schnitte des k -ten äusseren Produkts des Kotangentenbündels. In einer lokalen Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist für $p \in U$ eine Basis von $T_p M$ gegeben durch (s. (4.14)) $(\frac{\partial}{\partial x^i})$, $i = 1, \dots, n$, die duale Basis von $T_p^* M$ ist (dx^1, \dots, dx^n) , d.h. $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$, und man erkennt die Beziehung zur früheren Formulierung durch die Koordinatendarstellung

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (6.131)$$

Insbesondere lässt sich eine Topform $\omega \in \Omega^n(M)$ lokal schreiben als $f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ und man definiert

(i) Für eine orientierte Mannigfaltigkeit M

das Integral $\int_M \omega$ für

(ii) n -Formen ω mit kompaktem Träger

bzw. das Integral $\int_M \tilde{f} \omega$ für

(ii') glatte Funktionen \tilde{f} mit kompaktem Träger,

unter Zuhilfenahme der obigen Transformationseigenschaften sowie einer Partition der Eins.

· Für einen (Diffeo-)Morphismus $\Phi : M \rightarrow N$ ist der Pullback $\Phi^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ ein Algebra-Homomorphismus (eindeutig festgelegt durch Verträglichkeit mit der äusseren Ableitung $d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$), und es gilt für $\omega \in \Omega^n(N)$

$$\int_{\Phi(M)=N} \omega = \int_{M=\Phi^{-1}(N)} \Phi^* \omega \quad (6.132)$$

Zur Klärung:

Definition 6.28. Sei M eine diff. Mannigfaltigkeit.

(i) Eine *Volumenform* ist eine nirgends verschwindende Topform $\omega \in \Omega^n(M)$, d.h. $\omega_p \neq 0 \in \wedge^n T_p^* M \forall p \in M$.

(ii) M heisst *orientierbar* falls eine Volumenform existiert. In diesem Fall ist eine *Orientierung* eine Äquivalenzklasse $[\omega]$ wobei $\tilde{\omega} \sim \omega$ falls $\tilde{\omega} = f\omega$ mit $f \in \mathcal{F}(M)$, $f > 0$.

(iii) Sei $\Phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Eine Volumenform heisst *Φ -invariant*, falls

$$\Phi^* \omega = \omega \Leftrightarrow \int_M f \omega = \int_M \Phi^*(f) \omega \quad \forall f \quad (6.133)$$

Bemerkungen. Eine solche Volumenform definiert dann ein reguläres Borelmass auf dem zugrundeliegenden topologischen Raum M , aber das benötigen wir frühestens beim Beweis von Peter-Weyl.

Sein nun G eine (reelle) Lie-Gruppe der Dimension n . Der Einfachheit halber sei G zusammenhängend.

6.4. FOLGERUNGEN UND ERGÄNZUNGEN

Proposition 6.29. *Es existiert eine bis auf eine reelle Konstante eindeutige Volumenform ω auf G mit*

$$L_g^*(\omega) = \omega \quad (6.134)$$

für alle Linkstranslationen $L_g \in \text{Diff}(G)$, $g \in G$.

Beweis. (-skizze, insofern ich den Pullback usw. nicht im Detail erklärt habe.) Sei (x_1, \dots, x_n) eine Basis von $\mathfrak{g} = T_e G$, (X_1, \dots, X_n) die zugehörige Basis von $\mathfrak{X}^L(G)$, siehe 4.2.4, d.h.

$$X_{jh} = D_e L_h(x_j) \quad (6.135)$$

Sei $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ die dazu duale Basis von $\mathfrak{g}^* = T_e^* G$, und $\Lambda^1, \dots, \Lambda^n$ die (punktweise) dualen Einsformen, i.e. $\Lambda_h^i(X_{jh}) = \delta_j^i \forall h \in G$, oder auch

$$\Lambda_h^i = (D_e L_h)^{-*}(\lambda^i) \quad (6.136)$$

Beh.: Die Λ^i erfüllen $L_g^*(\Lambda^i) = \Lambda^i$

Bew.: Per Definition des Pullbacks gilt:

$$\begin{aligned} L_g^*(\Lambda^i)_h(X_{jh}) &= \Lambda_{L_g(h)}^i(D_h L_g(X_{jh})) = (\text{Links-Invarianz von } X_j) \\ &= \Lambda_{gh}^i(X_{jgh}) = \delta_j^i \\ &= \Lambda_h^i(X_{jh}) \Rightarrow L_g^*(\Lambda^i)_h = \Lambda_h^i \end{aligned} \quad (6.137)$$

Insbesondere sind die Λ^i punktweise eine Basis von T^*G und daher ist

$$\omega := \Lambda^1 \wedge \dots \wedge \Lambda^n \quad (6.138)$$

nirgends 0, somit eine Volumenform auf G .

· Wegen der Verträglichkeit des Pullbacks mit dem \wedge -Produkt folgt aus der Invarianz der Λ^i sofort $L_g^*\omega = \omega \forall g \in G$.

· Ist ω' eine andere Volumenform mit $L_g^*\omega' = \omega'$, so existiert ein $f \in \mathcal{F}(M)$, $f \neq 0$ mit $\omega' = f\omega$. Dann folgt $\forall g \in G$

$$f\omega = \omega' = L_g^*\omega' = L_g^*(f\omega) = L_g^*(f)L_g^*(\omega) = L_g^*(f)\omega \quad (6.139)$$

und da ω nirgends verschwindet $L_g^*(f) = f \forall g \in G \Rightarrow f$ ist konstant. **OEA**

Der Deutlichkeit halber wollen wir noch einen lokalen Koordinatenausdruck für ω festhalten. Seien (ξ^1, \dots, ξ^n) die zu x_1, \dots, x_n gehörigen (globalen) Koordinaten auf \mathfrak{g} , via Exponentialabbildung (5.16) aufgefasst als lokale Koordinaten auf G bei e . Seien $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ lokale Koordinate um $g \in G$. Dann ist

$$l_{gj}^k = \left. \frac{\partial(\sigma^k(L_g(\exp(\xi))))}{\partial \xi^j} \right|_{\xi=0} \quad (6.140)$$

die Matrixdarstellung von $D_e L_g : T_e G \rightarrow T_g G$ bzgl. der Basis $x_j = \frac{\partial}{\partial \xi^j}$ von $T_e G$ und $\frac{\partial}{\partial \sigma^k}$ von $T_g G$, und es gilt

$$\begin{aligned} X_{gj}^k &= l_{gj}^k \\ \Lambda_g^j &= (l_g^{-T})_k^j d\sigma^k \end{aligned} \quad (6.141)$$

und daher

$$\omega_g = \det(l_g^{-T}) d\sigma^1 \wedge \cdots \wedge d\sigma^n = \frac{1}{\det l_g} d\sigma^1 \wedge \cdots \wedge d\sigma^n \quad (6.142)$$

Man prüfe explizit die Linksinvarianz dieser Formel.

· Natürlich existiert ganz analog eine eindeutige rechts-invariante Volumenform

$$\tilde{\omega} = \tilde{\Lambda}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\Lambda}^n \quad (6.143)$$

mit

$$\tilde{\Lambda}_h^i = (D_e R_h)^{-*}(\lambda^i) \quad (6.144)$$

6.4.5 Kompakte Lie-Gruppen versus Reduktive Lie-Algebren

Interessanterweise, und im Unterschied etwa zur Lie-Klammer (4.41), gilt im Allgemeinen $\omega \neq \tilde{\omega}$, selbst bis auf eine Konstante, siehe Übungen.

Theorem 6.30. *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit reduktiver Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann sind links- und rechtsinvariante Volumenformen gleich.*

Beweis. Zutat 1: Aus (6.136) und (6.144) folgt

$$\tilde{\Lambda}_g^i = (D_e R_g)^{-*} \circ (D_e L_g)^*(\Lambda_g^i) \quad (6.145)$$

und daher

$$\tilde{\omega}_g = \det((D_e R_g)^{-*} (D_e L_g)^*) \omega_g \quad (6.146)$$

Nun gilt $D_e R_g^{-1} = D_g R_{g^{-1}} : T_g G \rightarrow T_e G$ und ganz allgemein

$$\det A^* B^* = \det BA = \det AB \quad \text{für lin. Abb. } V \xrightarrow{A} W \xrightarrow{B} V \quad (6.147)$$

zusammen also

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_g &= \det(D_g R_{g^{-1}} D_e L_g) \omega_g \\ &= \det D_e(R_{g^{-1}} L_g) \omega_g \\ &= \det D_e(\text{Ad}_g) \omega_g \\ &= (\det \text{Ad}_g) \omega_g \end{aligned} \quad (6.148)$$

(s. (5.31).)

Zutat 2: Sei $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ad-invariante nicht-entartete symmetrische Bilinearform (z.B. Killing-Form auf $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, beliebig auf $Z_{\mathfrak{g}}$ in der Zerlegung (6.121)).

$$B(\text{ad}_z x, y) + B(y, \text{ad}_z x) = 0 \quad (6.149)$$

bedeutet nichts anderes, als dass $\text{ad}_z \in \mathfrak{so}(B) \forall z \in \mathfrak{g}$ (vgl. (4.62)). Daher gilt mit (5.40)

$$\text{Ad}_{\exp(z)} = \exp(\text{ad}_z) \in O(B) \quad \forall z \in \mathfrak{g} \quad (6.150)$$

Da \mathfrak{g} zusammenhängend ist, ist $\text{Ad}_{\exp(z)} \in SO(B)$. Da G zusammenhängend ist, wird G durch $\exp(\mathfrak{g})$ erzeugt, und daher gilt $\text{Ad}_G \subset SO(B)$, also

$$\det \text{Ad}_g = 1 \quad \forall g \in G \quad (6.151)$$

und zusammen mit (6.148) ist der Satz bewiesen. **OEΔ**

6.4. FOLGERUNGEN UND ERGÄNZUNGEN

Für G kompakt (auch nicht zsh.) kann man noch etwas bequemer folgendermassen argumentieren:

· In jedem Fall ist für alle $g \in G$ $R_g^* \omega$ links-invariant (da Links- und Rechtstranslationen kommutieren), und daher

$$R_g^* \omega = \Delta_g \omega \quad (6.152)$$

für eine (zunächst von g abhängige!) Konstante $\Delta_g \in \mathbb{R}$.

· Falls G kompakt ist, existiert $\int_G \omega > 0$,⁸ und es gilt

$$\Delta_g \int_G \omega = \int_G \Delta_g \omega = \int_G R_g^* \omega \stackrel{(6.132)}{=} \int_G \omega \quad (6.153)$$

und daher $\Delta_g = 1 \forall g$.

· Die wesentliche Aussage im kompakten Fall ist aber

Theorem 6.31. *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} .*

(i) *Falls G kompakt ist, so ist \mathfrak{g} reduktiv und die Killing-Form auf dem halb-einfachen Teil $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ von \mathfrak{g} ist negativ definit.*

(ii) *Ist umgekehrt \mathfrak{g} halb-einfach und die Killing-Form negativ definit, so ist G kompakt.*

Bemerkungen. Natürlich reicht es in (i), wenn die Zusammenhangskomponente von e kompakt ist. Reduktivität von \mathfrak{g} reicht im Allgemeinen nicht für Kompaktheit auch bei negativ definitem ad-invariantem inneren Produkt, wie etwa das Beispiel $G \times \mathbb{R}$ zeigt. Ein Korollar des Beweises von (ii) zusammen mit (i) ist, dass die Killing-Form nie positiv definit ist (Übung!)

Beweis. (i) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ ein (beliebiges) positiv definites inneres Produkt auf \mathfrak{g} , und $\omega \in \Omega^n(G)$ die (links- und rechts-)invariante Volumenform. Sei für $x, y \in \mathfrak{g}$, $h \in G$

$$F_{x,y}(h) := (\text{Ad}_h x, \text{Ad}_h y) \quad (6.154)$$

und setze

$$\langle x, y \rangle := \int_G F_{x,y} \omega \quad (6.155)$$

Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein positiv definites inneres Produkt auf \mathfrak{g} und wegen

$$F_{\text{Ad}_g x, \text{Ad}_g y}(h) = (\text{Ad}_{hg} x, \text{Ad}_{hg} y) = R_g^*(F_{x,y})(h) \quad (6.156)$$

gilt

$$\langle \text{Ad}_g x, \text{Ad}_g y \rangle = \int_G R_g^* F_{x,y} \omega = \int_G F_{x,y} \omega = \langle x, y \rangle \quad (6.157)$$

Ableiten am neutralen Element ergibt

$$\langle \text{ad}_z x, y \rangle + \langle x, \text{ad}_z y \rangle = 0 \quad \forall z \in \mathfrak{g} \quad (6.158)$$

also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ad-invariant und damit ist \mathfrak{g} reduktiv (Übung!).

· Ähnlich wie (6.149) fassen wir (6.158) auf als die Aussage, dass $\text{ad}_z \in \mathfrak{so}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

⁸Nehmen wir etwa an, dass $\dim G > 0$ — Für $\dim G = 0$ ist das Haarsche Mass das Zählmass.

Daraus folgt (lineare Algebra), dass alle nicht-verschwindenden Eigenwerte von ad_z rein imaginär sind.⁹ Für $z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \setminus \{0\}$ ist $\text{ad}_z \neq 0$ (s. (6.121)), hat also mindestens einen nicht-verschwindenden Eigenwert. Es folgt

$$B_{\mathfrak{g}}(z, z) = \text{tr}_{\mathfrak{g}} \text{ad}_z^2 = \sum (\text{Eigenwerte})^2 < 0 \quad (6.159)$$

(ii) (Ideenskizze) Wir benutzen die Identifikation $\text{ad}_{\mathfrak{g}} = \text{Der}(\mathfrak{g})$ aus Theorem 6.23: Unter der Assoziation von Lie-Algebren zu Lie-Gruppen aus 4.2.4 ist $\text{Der}(\mathfrak{g})$ die Lie-Algebra der Lie-Gruppe $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Wegen $\text{ad}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{so}(B)$ gilt daher nach dem Satz von Chevalley-Frobenius (s. Seite 50) mit $\text{Aut}(\mathfrak{g})_0 \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements,

$$\text{Ad}_G = \text{Aut}(\mathfrak{g})_0 \subset \text{SO}(B) \subset \text{GL}(\mathfrak{g}) \quad (6.160)$$

Nun ist aber $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ in $\text{GL}(\mathfrak{g})$ abgeschlossen, und $\text{SO}(B)$ kompakt, da $-B$ positiv definit ist (s. 4.3.4). Also ist auch $\text{Aut}(\mathfrak{g})_0$ kompakt.

· Wegen $\text{ad}_{\mathfrak{g}} = \text{Der}(\mathfrak{g})$ ist $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})_0$ ein lokaler Isomorphismus, nach Lemma 5.17 also eine Überlagerung von Lie-Gruppen. Da $Z_{\mathfrak{g}} = Z_{\text{Der}(\mathfrak{g})} = 0$, kann $Z(\text{Aut}(\mathfrak{g})_0)$ keinen Häufungspunkt bei e haben (Dies erfordert etwas Arbeit.) Daher ist $Z(\text{Aut}(\mathfrak{g})_0)$ endlich. Ausserdem ist die Fundamentalgruppe von $\text{Aut}(\mathfrak{g})_0$ endlich. (Noch mehr Arbeit.) Dann ist $G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})_0$ eine endliche Überlagerung und damit G kompakt. OEA

Schlussbetrachtungen.

Durch Linkstranslation lässt sich jede Metrik (nicht-entartete symmetrische Bilinearform) auf \mathfrak{g} zu einer (i.a., pseudo-)Riemannschen Metrik auf der Gruppe G fortsetzen. Dazu benutzt man den Isomorphismus $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{X}^L(G)$, und dass $\mathfrak{X}^L(G)$ jeden $T_g G$ aufspannt.

· Eine Ad-invariante Metrik auf \mathfrak{g} wird dabei zu einer links- und rechts-invarianten pseudo-Riemannschen Metrik, siehe Beweis von Theorem 6.30. Diese Metrik hat eine Reihe interessanter Eigenschaften. Z.B. sind ihre Geodäten genau die Translate von Einparameter-Untergruppen. Für \mathfrak{g} einfach hat sie ausserdem konstante Krümmung, und der Ricci-Tensor ist proportional zur Metrik. Dies erlaubt es z.B., die Metrik zu normieren und für kompakte Lie-Gruppen ein kanonisches Volumen zu definieren, etc. pp.

⁹Wir setzen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fort zu einem hermiteschen inneren Produkt auf $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Ist dann $\text{ad}_z x = \lambda x$, $x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so folgt die Aussage aus $\bar{\lambda} \langle x, x \rangle = \langle \text{ad}_z x, x \rangle = -\langle x, \text{ad}_z x \rangle = -\lambda \langle x, x \rangle$.

KAPITEL 7

EINFACHE LIE-ALGEBREN ÜBER \mathbb{C}

Es stellt sich heraus, dass man bei der Untersuchung der Struktur der halb-einfachen Lie-Algebren über die allgemeinen Aussagen des letzten Kapitels nicht weit hinauskommt, ohne eine Reihe ganz konkreter und zunächst scheinbar willkürlicher Wahlen zu treffen. Die Begründung für diese Wahlen liegt teils in den Beispielen, teils in etwas allgemeineren darstellungstheoretischen Betrachtungen. Letztendlich hängt die Struktur bis auf Isomorphie nicht von den Wahlen ab, und die Beispiele erschöpfen die Klassifikation (fast), so dass uns unter dem Strich nichts verlorengegangen ist, und wir mit der Theorie ganz zufrieden sein können.

Wir fangen mit einem Beispiel an.

§ 7.1 Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

Zur Erinnerung: Wir hatten in 5.5.3 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ kennengelernt als die bis auf Isomorphismus eindeutige 3-dimensionale Lie-Algebra (über \mathbb{C}) mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Dies war uns gelungen durch Identifikation eines ad-halbeinfachen Elements $h \in \mathfrak{g}$ mit nicht-verschwindendem Eigenwert und Eigenvektoren e, f (die, zusammen mit h , \mathfrak{g} aufspannen), und den Klammern

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h \quad (7.1)$$

und dem Isomorphismus $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Wir verallgemeinern nun zunächst diese Strukturen zu $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Fakt 7.1. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{x \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}), \text{tr } x = 0\}$ ist halb-einfach.

Beweis. Betrachte die Bilinearform auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

$$B_{\mathbb{C}^n} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, \quad B_{\mathbb{C}^n}(x, y) = \text{tr}_{\mathbb{C}^n}(xy) \quad (7.3)$$

$B_{\mathbb{C}^n}$ ist symmetrisch und ad-invariant. Ausserdem ist $B_{\mathbb{C}^n}$ nicht entartet, denn für $x \neq 0$ ist $x^\dagger x \geq 0$, aber $\neq 0$, d.h. $B_{\mathbb{C}^n}(x^\dagger, x) > 0$. Also ist \mathfrak{g} reduktiv. Wir zeigen im Folgenden $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Dann ist mit Theorem 6.27 \mathfrak{g} halb-einfach. OEΔ

Zum Nachweis von $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ und für die weiteren Untersuchungen sei einerseits

$$\mathfrak{h} := \text{die abelsche Unter algebra der spurlosen Diagonalmatrizen} \quad (7.4)$$

und andererseits für $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$

$$e_{ij} := i \begin{pmatrix} & & j & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Dann gilt:

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}e_{ij}$ (als direkte Summe von Vektorräumen, aber natürlich nicht als Produkt von Lie-Algebren)
2. $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$ wirkt diagonal in der Basis der e_{ij} —Für $h = \text{Diag}(h_1, \dots, h_n), \sum h_i = 0$ gilt:

$$\text{ad}_h(e_{ij}) = (h_i - h_j)e_{ij} \quad (7.6)$$

—und trivial auf \mathfrak{h} selbst, weshalb man in \mathfrak{h} zunächst keine natürliche Basis hat. M.a.W. sind die $\mathfrak{g}_{ij} := e_{ij}\mathbb{C}$ die gemeinsamen Eigenräume der $\text{ad}_h, h \in \mathfrak{h}$. Die linearen Abbildungen

$$\alpha_{ij} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h \mapsto h_i - h_j \quad (7.7)$$

heissen *Wurzeln* (von \mathfrak{g} bzgl. \mathfrak{h}). Die \mathfrak{g}_{ij} werden manchmal Wurzelräume genannt. Für die spätere Entwicklung ist aber der *Wurzelraum* \mathfrak{h}^* wichtiger.

An dieser Stelle folgt $\mathbb{C}e_{ij} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

3.

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \begin{cases} 0 & j \neq k, i \neq l \\ e_{il} & j = k, i \neq l \\ -e_{kj} & j \neq k, i = l \\ \in \mathfrak{h} & \text{falls } j = k \text{ und } i = l \end{cases} \quad (7.8)$$

Genauer gilt für $i < j$:

$$[e_{ij}, e_{ji}] =: h^{(ij)} = \text{Diag}(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, \overset{j}{-1}, \dots, 0) \quad (7.9)$$

Da die $h^{(ij)} \in \mathfrak{h}$ aufspannen, folgt dann hier $\mathfrak{h} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, womit der Halbeinfachheitsbeweis abgeschlossen ist.

Achtung: Man verwechsle nie(!) $\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^*$ mit $h^{(ij)} \in \mathfrak{h}$!

Merkmal: $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{h^{(ij)}, e_{ij}, e_{ji}\} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Zur weiteren Untersuchung (mit dem Ziel der Nachweis, dass $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ einfach ist, **Fakt 7.2**), weisen wir auf die Existenz der folgenden weiteren Strukturen hin.

(i) Reelle Struktur: Sei

$$\mathfrak{h}_0 := \text{spurlose Diagonalmatrizen mit reellen Einträgen} \quad (7.10)$$

als reeller Vektorraum. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Sei ausserdem $\mathfrak{h}^* \ni \lambda_i : h \mapsto h_i$. Dann wird der reelle Dualraum \mathfrak{h}_0^* aufgespannt von den λ_i mit der Beziehung $\sum \lambda_i = 0$, und es gilt

7.1. WURZELRAUMZERLEGUNG VON $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

$\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$. M.a.W. liegen alle Wurzeln in einem gemeinsamen reellen Unterraum von \mathfrak{h}^* . Weiter ist

$$\lambda_i(h^{(kl)}) = \delta_i^k - \delta_i^l \in \mathbb{R} \quad (7.11)$$

d.h. alle $h^{(kl)} \in \mathfrak{h}_0$. (Dies hängt an unserer Wahl der Basis in den \mathfrak{g}_{ij} .)

(ii) Anordnung: Jedes $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ lässt sich in eindeutiger Weise schreiben als

$$\lambda = \sum_{i=1}^n c^i \lambda_i, \quad c^i \in \mathbb{R} \quad \sum c^i = 0 \quad (7.12)$$

und wir erklären $\lambda > 0$ falls das erste nicht-verschwindende $c^i > 0$. Dies gibt eine Zerlegung

$$\mathfrak{h}_0^* = (\mathfrak{h}_0^*)_+ \cup \{0\} \cup (\mathfrak{h}_0^*)_- \quad (7.13)$$

in der $(\mathfrak{h}_0^*)_+$ abgeschlossen ist unter positiven Linearkombinationen, und $(\mathfrak{h}_0^*)_- = -(\mathfrak{h}_0^*)_+$.

· Insbesondere ist die endliche Menge $\Phi = \{\alpha_{ij}\}$ der Wurzeln geordnet mit

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1n} > \alpha_{1,n-1} > \cdots > \alpha_{12} > \alpha_{2n} > \cdots > \alpha_{n-1,n} (> 0) \\ \alpha_{n1} < \alpha_{n-1,1} < \cdots < \alpha_{21} < \alpha_{n2} < \cdots < \alpha_{n,n-1} (< 0) \end{array} \right\} \neq \emptyset \quad (7.14)$$

Die positiven Wurzeln gehören zu den e_{ij} , welche obere Dreiecksmatrizen sind.

· α_{1n} ist höchste genannte grösste Wurzel.

· Setzen wir $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} := \mathfrak{g}_{ij}$ und $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{h} = \text{Ker ad}_{\mathfrak{h}}$ (ohne 0 als Wurzel zu bezeichnen), so lassen sich die Klammern (7.8) etwas kompakter schreiben als

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \begin{cases} \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \in \Phi \\ 0 & \text{falls } \alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\} \\ \subset \mathfrak{h} & \text{falls } \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

Beweis der Einfachheit von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$: Sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ ein Ideal, $\mathfrak{a} \neq 0$. Falls $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} \neq 0$, so existiert ein $h \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$, $h \neq 0$ und eine Wurzel $\alpha_{ij} \in \Phi$ mit $\alpha_{ij}(h) \neq 0$. Aus $[e_{ij}, h] = -[h, e_{ij}] = -\alpha_{ij}(h)e_{ij}$ folgt dann $e_{ij} \in \mathfrak{a}$.

· In jedem Fall existiert also ein $x \in \mathfrak{a}$ mit nicht-trivialer Komponente in $\bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_\alpha$. Angenommen $x = \sum c^{ij} e_{ij} + h$ mit $c^{ij} \neq 0$ für eine $\alpha_{ij} < 0$, so sei $\alpha_{kl} < 0$ die kleinste Wurzel mit $c^{kl} \neq 0$. OBdA können wir annehmen, dass

$$x = e_{kl} + \sum_{\alpha_{ij} > \alpha_{kl}} c^{ij} e_{ij} + h \quad (7.16)$$

Beh.: $[e_{1k}, [x, e_{ln}]] \in \mathfrak{g}_{1n} \setminus \{0\}$. (Aus $\alpha_{kl} < 0$ folgt $k > l$, also $k > 1$ und $l < n$.)

Bew.: Aus (7.15) bzw. (7.8) folgt

$$[e_{1k}, [x, e_{ln}]] \in \underbrace{[e_{1k}, [e_{kl}, e_{ln}]]}_{=(1 \text{ oder } 2)e_{1n}} + \underbrace{\bigoplus_{\alpha_{ij} > \alpha_{kl}} [\mathfrak{g}_{1k}, [\mathfrak{g}_{ij}, \mathfrak{g}_{ln}]]}_{=0, \text{ da } \alpha_{1n} \text{ die höchste Wurzel}} \quad (7.17)$$

Es folgt $e_{1n} \in \mathfrak{a}$, daraus $e_{ij} \in \mathfrak{a} \forall \alpha_{ij}$, und schliesslich noch $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}$. Also $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. Der Fall $c^{ij} \neq 0$ für ein $\alpha_{ij} > 0$ geht analog. **OEA**

Wir wollen diese Strukturen während der allgemeinen Entwicklung in § 7.3 im Auge behalten. Davor noch ein paar Bemerkungen zur Darstellungstheorie.

§ 7.2 Darstellungstheoretische Betrachtungen

Im Anschluss an unsere Entdeckung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ hatten wir in 5.5.4 noch deren Darstellungstheorie untersucht. Wir hatten insbesondere gefunden, dass jede Irrep in eindeutiger Weise durch eine nicht-negative ganze Zahl l bezeichnet wird, mit $\dim V_l = l + 1$ und der Zerlegung

$$V_l = \bigoplus_{k=0}^l V_{l,m:=l-2k} \quad (7.18)$$

nach Eigenräumen von $\rho(h)$, $\rho(h)|_{V_{l,m}} = m$, durch die man mit Hilfe von $\rho(e)$, $\rho(f)$ hindurchsteigen kann. $\rho(e)V_{l,m} = V_{l,m+2}$ (oder 0 falls $m + 2 > l$), $\rho(f)V_{l,m} = V_{l,m-2}$ (oder 0, falls $m - 2 < -l$).

Der Lohn der für eine allgemeine halb-einfache Lie-Algebra \mathfrak{g} zu treffenden Wahlen wird sein, dass sich solche Überlegungen auf die Darstellungstheorie von \mathfrak{g} übertragen lassen.

Wiederholung der Notation:

· Für zwei (endlich-dimensionale, komplexe) Darstellungen (V, ρ) und (W, σ) einer Lie-Algebra \mathfrak{g} schreiben wir

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), \sigma(x)\phi = \phi\rho(x) \forall x \in \mathfrak{g}\} \quad (7.19)$$

für den Raum der \mathfrak{g} -Morphismen.

· Mit der Identifikation

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \cong W \otimes V^* \quad (7.20)$$

und den üblichen Definitionen für Tensorprodukt (6.3) und Dual (6.4) von Darstellungen gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \cong (W \otimes V^*)^{\mathfrak{g}} = \{\phi \in W \otimes V^*, (\sigma \otimes \rho^*)(x)(\phi) = 0 \forall x \in \mathfrak{g}\} \quad (7.21)$$

· Falls V irreduzibel ist so gilt $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_V$ (Lemma von Schur)

· Wie bei den endlichen Gruppen ist die Spur eine Quelle von Invarianten.

7.2.1 Der (quadratische) Casimir-Operator

Beobachtung: Für eine Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(V)$ einer Lie-Algebra ist $\mathrm{Ker} \rho \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal. Falls \mathfrak{g} halb-einfach ist, so ist

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Ker} \rho \oplus \tilde{\mathfrak{g}} \quad (7.22)$$

mit $\tilde{\mathfrak{g}}$ halb-einfach. Wir verlieren also nichts, wenn wir uns auf treue Darstellungen beschränken. Es gibt dann die folgende Verallgemeinerung der Killing-Form (vgl. (7.3))

Proposition 7.3. *Sei $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(V)$ eine treue Darstellung einer halb-einfachen Lie-Algebra. Dann ist die Bilinearform*

$$B_{\rho} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, \quad B_{\rho}(x, y) = \mathrm{tr}_V \rho(x)\rho(y) \quad (7.23)$$

symmetrisch, ad-invariant und nicht-entartet.

7.2. DARSTELLUNGSTHEORETISCHE BETRACHTUNGEN

Beweis. Symmetrisch und ad-invariant sind klar (siehe unten!). Für die Nicht-entartetheit sei

$$\mathfrak{a} = \text{rad } B_\rho = \{x, B_\rho(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\} \quad (7.24)$$

Wegen der ad-Invarianz ist \mathfrak{a} ein Ideal.

Beh.: $\rho(\mathfrak{a})$ ist auflösbar. Da ρ treu ist (also ein Isomorphismus auf das Bild), folgt daraus, dass \mathfrak{a} auflösbar ist, also $\mathfrak{a} = 0$, da \mathfrak{g} halb-einfach.

Bew.: $\rho(\mathfrak{a}) = \{\rho(x), \text{tr}_V \rho(x)\rho(y) = 0 \ \forall \rho(y) \in \rho(\mathfrak{g})\}$

· Durch Imitation von Lemma 6.19 folgt aus der (schwächeren) Aussage

$$\text{tr}_V \rho(x)\rho([y, z]) = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{a} \quad (7.25)$$

dass $\forall u, v \in \mathfrak{a} \ \rho([u, v]) \in \text{End}(V)$ nilpotent ist. Daher ist nach dem Satz von Engel, Lemma 6.13, $\rho([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) = [\rho(\mathfrak{a}), \rho(\mathfrak{a})]$ nilpotent. Also ist $\rho(\mathfrak{a})$ auflösbar. **OEΔ**

· Diese quadratische Form ist ein allgemeines Hilfsmittel für die Darstellungstheorie. Z.B. müssen für \mathfrak{g} einfach nach dem Lemma von Schur alle B_ρ proportional zu $B_{\mathfrak{g}} = B_{\text{ad}}$ sein, und isomorphe Darstellungen führen zum gleichen B_ρ . Zur Vorbereitung der vollständigen Zerlegbarkeit wollen wir die ad-Invarianz noch etwas anders formulieren.

· Mit den obigen Vereinbarungen können wir eine Darstellung recht tautologisch auch auffassen als einen \mathfrak{g} -Morphismus

$$\rho \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, V \otimes V^*) \quad (7.26)$$

(es gilt nämlich $\rho(\text{ad}_z(x)) = \rho([z, x]) = \rho(z)\rho(x) - \rho(x)\rho(z) = (\rho \otimes \rho^*)(z)\rho(x)$).

· Betrachten wir nun

$$\rho \circ \rho : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow V \otimes V^*, \quad x \otimes y \mapsto \rho(x)\rho(y) \quad (7.27)$$

so folgt aus

$$\begin{aligned} \rho \circ \rho((\text{ad} \otimes \text{ad})(z)(x \otimes y)) &= \rho([z, x])\rho(y) + \rho(x)\rho([z, y]) \\ &= \rho(z)\rho(x)\rho(y) - \rho(x)\rho(y)\rho(z) \\ &= (\rho \otimes \rho^*)(z)(\rho \circ \rho)(x \otimes y) \end{aligned} \quad (7.28)$$

dass

$$\rho \circ \rho \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, V \otimes V^*) \quad (7.29)$$

· Andererseits können wir die Spur $\text{tr}_V \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V \otimes V^*, \mathbb{C})$ wegen ihrer Zyklizität auffassen als

$$\text{tr}_V \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V \otimes V^*, \mathbb{C}) \quad (7.30)$$

wobei \mathbb{C} die triviale ein-dimensionale Darstellung ist. Dies ist der Grund dafür, dass die Verknüpfung

$$B_\rho = \text{tr}_V \rho \circ \rho \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathbb{C}) \quad (7.31)$$

ad-invariant ist.

· Für eine etwas andere Richtung sei nun \mathfrak{g} halb-einfach, und

$$B \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathbb{C}) = (\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \quad (7.32)$$

irgendeine nicht-entartete ad-invariante symmetrische Bilinearform. Dann liefert B einen \mathfrak{g} -Isomorphismus $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ und ihr Inverses

$$B^{-1} \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*, \mathbb{C}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \quad (7.33)$$

· Die Anwendung von $\rho \circ \rho$ liefert dann eine \mathfrak{g} -Invariante in $(V \otimes V^*)^{\mathfrak{g}}$.

Definition 7.4. Für eine endlich-dimensionale Darstellung ρ von \mathfrak{g} und eine ad-invariante Bilinearform B heisst

$$C_{\rho, B} = \rho \circ \rho(B^{-1}) \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) \quad (7.34)$$

das *Casimir-Element* (oder der quadratische Casimir-Operator) von ρ (relativ zu B).

· Für eine etwas konkretere Formulierung sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Orthonormalbasis von \mathfrak{g} bzgl. B . Dann ist

$$C_{\rho, B} = \sum_i \rho(x_i)\rho(x_i) \quad (7.35)$$

· Für irreduzible ρ ist $C_{\rho, B} \propto \text{id}_V$, die Information steckt also in der Normierung (relativ zu B).

· Für \mathfrak{g} halb-einfach ist eine kanonische Wahl natürlich $B = B_{\mathfrak{g}}$, für eine treue Darstellung auch B_{ρ} . In diesem Fall gilt

$$\text{tr}_V C_{\rho, B_{\rho}} = B_{\rho}(B_{\rho}^{-1}) = \text{tr}_{\mathfrak{g}} B_{\rho} B_{\rho}^{-1} = \dim \mathfrak{g} \quad (7.36)$$

(vgl. (7.35)).

Proposition 7.5. *Für jede treue Darstellung einer halb-einfachen Lie-Algebra ist $C_{\rho, B_{\rho}}$ ein \mathfrak{g} -Endomorphismus von V mit nicht-verschwindender Spur, für irreduzible Darstellungen ausserdem $\propto \text{id}_V$.* **OEΔ**

Beispiel 7.6. Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ mit Basis h, e, f wie gehabt ist in der zwei-dimensionalen Darstellung

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

Der Casimir Operator ist dann die lineare Abbildung

$$C_{\rho, B_1} = \rho \circ \rho\left(\frac{1}{2}h \otimes h + e \otimes f + f \otimes e\right) = \left(\frac{1}{2}\rho(h)^2 + \rho(e)\rho(f) + \rho(f)\rho(e)\right) \quad (7.38)$$

Man prüft leicht explizit, dass C_{ρ, B_1} \mathfrak{g} -invariant ist, und dass in einer unseren irreduziblen Darstellungen

$$C_{\rho, B_1} = l\left(\frac{l}{2} + 1\right) \quad (7.39)$$

(Siehe auch (5.77).)

7.2.2 Vollständige Zerlegbarkeit

Theorem 7.7 (Weyl). *Sei $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer halb-einfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann ist ρ vollständig zerlegbar.*

Beweis. Ein intuitiv zugänglicher Beweis benutzt den sog. Weylschen Unitaritätstrick (siehe Übungen). Der algebraische Beweis ist aber auch höchst interessant:

1. *Schritt:* Wir halten zunächst fest, dass jede ein-dimensionale Darstellung (W, σ) von \mathfrak{g} trivial ist: Aus $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ (siehe (6.109)) folgt für $x \in \mathfrak{g}$

$$\sigma(x) = \text{tr}_W \sigma(x) \in \text{tr}_W \sigma([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \text{tr}_W [\sigma(\mathfrak{g}), \sigma(\mathfrak{g})] = 0 \quad (7.40)$$

2. *Schritt:* Wegen (7.22) reicht es, sich auf treue Darstellungen zu beschränken. Zu zeigen ist also, dass in diesem Fall für jeden nicht-trivialen invarianten Unterraum $W \subset V$ ein komplementärer Unterraum U existiert mit $V = W \oplus U$. Äquivalent dazu ist die Angabe eines \mathfrak{g} -Morphismus $\pi : V \rightarrow W$ mit $\pi|_W = \text{id}_W$, und $U = \text{Ker } \pi$.

3. *Schritt:* Wir tun dies zunächst im Fall, dass W irreduzibel ist, und V/W ein-dimensional. Sei dazu $C = C_{\rho, B_\rho}$ der quadratische Casimir aus (7.36). Da W invariant ist und C ein \mathfrak{g} -Morphismus, folgt $C(W) \subset W$. Gemäss (7.40) ist C dann trivial auf V/W , also $C(V) \subset W$. Da W irreduzibel ist, folgt $C|_W = \alpha \text{id}_W$ und wegen $\text{tr } C = \dim \mathfrak{g}$ ist $\alpha \neq 0$. $\pi = C/\alpha$ ist also die gesuchte Projektion.

4. *Schritt:* Für W nicht notwendig irreduzibel, aber immer noch Kodimension 1, beweisen wir die Aussage durch vollständige Induktion nach $\dim V = \dim W + 1$. Für $\dim V = 1, 2$ ist nichts mehr zu zeigen. (Für $\dim V = 1$ ist V irreduzibel, für $\dim V = 2$ ist W irreduzibel.) Für $\dim W > 1$ ist W entweder irreduzibel (siehe dann 3. Schritt), oder es existiert ein nicht-trivialer invarianter Unterraum $W' \subset W$. Da $W/W' \subset V/W'$ immer noch Kodimension 1 hat, und $\dim V/W' < \dim V$, existiert nach Induktionsvoraussetzung ein ein-dimensionaler komplementärer Unterraum \tilde{W}/W' mit

$$V/W' = W/W' \oplus \tilde{W}/W' \quad (7.41)$$

$\tilde{W} \subset V$ ist ein invarianter Unterraum¹, mit $\dim \tilde{W} < \dim V$ und $W' \subset \tilde{W}$ ist ein invarianter Unterraum der Kodimension 1. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein ein-dimensionaler komplementärer Unterraum U mit $\tilde{W} = W' \oplus U$. Nun gilt $U + W = V$ und $U \cap W = 0$, also $V = W \oplus U$.

5. *Schritt:* Für den allgemeinen Fall betrachten wir den Vektorraum

$$\mathcal{V} := \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), f|_W \propto \text{id}_W\} \quad (7.42)$$

und suchen darin eine invariante π mit $\pi|_W = \text{id}_W$.

Beh.: \mathcal{V} ist eine Unterdarstellung von $W \otimes V^*$.

Bew.: Für $f \in \mathcal{V}$ existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f|_W = \alpha \text{id}_W$. Für $w \in W$ gilt dann $\forall x \in \mathfrak{g}$

$$(\rho \otimes \rho^*)(f)(w) = \rho(x)f(w) - f(\rho(x)(w)) = \rho(x)(\alpha w) - \alpha \rho(x)(w) = 0 \quad (7.43)$$

M.a.W. ist $\rho \otimes \rho^*(\mathfrak{g})(\mathcal{V})$ sogar im invarianten Unterraum

$$\mathcal{W} = \{g \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), g|_W = 0\} \subset \mathcal{V} \quad (7.44)$$

¹Es gilt $\tilde{W} + W = V$, aber nur $\tilde{W} \cap W \subset W'$, nicht notwendig $= 0$!

· $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ hat Kodimension 1, denn $\mathcal{V}/\mathcal{W} \cong \text{id}_W \mathbb{C}$. Also existiert nach dem 4. Schritt ein komplementärer invarianter Unterraum \mathcal{U} , aufgespannt von $\pi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ mit $\pi|_W = \text{id}_W$. OEΔ

7.2.3 Erhaltung der Jordan-Zerlegung

Theorem 7.8. *Sei $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ eine Darstellung einer halb-einfachen komplexen Lie-Algebra. Für $x \in \mathfrak{g}$ sei*

$$x = s + n, \quad [s, n] = 0 \tag{7.45}$$

die abstrakte Jordan-Zerlegung von (6.100). Dann ist

$$\rho(x) = \rho(s) + \rho(n) \tag{7.46}$$

die Jordan-Zerlegung von $\rho(x) \in \text{End}(V)$.

Beweis. · Wegen (7.22) genügt es anzunehmen, dass ρ treu ist, und wegen Thm. 7.7, dass V irreduzibel ist. M.a.W. können wir annehmen, dass $\mathfrak{g} \subset \text{End}(V)$ eine halb-einfache Lie-Algebra ist und V irreduzibel für \mathfrak{g} .

· Sei

$$x = x_s + x_n \tag{7.47}$$

die Jordan-Zerlegung von $x \in \mathfrak{g}$ als Endomorphismus von V .

· Ist $V = \bigoplus_i V_i$ die Eigenraum-Zerlegung von x_s , so ist $\bigoplus_{i,j} V_i \otimes V_j^*$ die Eigenraumzerlegung von $\text{ad}_{x_s}^V \in \text{End}(\text{End}(V))$, letzteres also halb-einfach. Natürlich ist $[\text{ad}_{x_s}^V, \text{ad}_{x_n}^V] = 0$ und $\text{ad}_{x_n}^V$ nilpotent, und daher

$$\text{ad}_x^V = \text{ad}_{x_s}^V + \text{ad}_{x_n}^V \tag{7.48}$$

die Jordan-Zerlegung von ad_x^V in $\text{End}(\text{End}(V))$.

· Um zu zeigen, dass (7.47) die abstrakte Jordan-Zerlegung ist, müssen wir nachweisen, dass $x_s \in \mathfrak{g}$: Denn dann ist $\text{ad}_{x_s}^V(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ und die Einschränkung auf \mathfrak{g} ist halb-einfach. Ähnlich ist dann $\text{ad}_{x_n}^V$ nilpotent in $\text{End}(\mathfrak{g})$, und es folgt $\text{ad}_{x_s}^V|_{\mathfrak{g}} = (\text{ad}_x)_s$, etc. ²

· Da $\text{ad}_{x_s}^V \in \text{ad}_x^V \mathbb{C}[\text{ad}_x^V]$ und $\text{ad}_x^V(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, folgt $\text{ad}_{x_s}^V(\mathfrak{g}) \subset (\mathfrak{g})$. M.a.W. ist

$$x_s \in N = N_{\text{End}(V)}(\mathfrak{g}) := \{y \in \text{End}(V), [y, x] \in \mathfrak{g} \forall y \in \mathfrak{g}\} \tag{7.49}$$

dem “Normalisator” von \mathfrak{g} in $\text{End}(V)$.

· N ist eine Unter algebra von $\text{End}(V)$ und enthält \mathfrak{g} als Ideal. Als endlich-dimensionale Darstellung von \mathfrak{g} ist N vollständig zerlegbar, d.h.

$$N = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \tag{7.50}$$

Wegen $[N, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ gilt $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$, d.h. \mathfrak{h} besteht aus Endomorphismen von V , die mit \mathfrak{g} vertauschen, und da V irreduzibel ist, folgt $\mathfrak{h} = \text{id}_V \mathbb{C}$.

· Wir schreiben gemäss (7.50) $x_s = (x_s)_{\mathfrak{g}} + \alpha \text{id}_V$ und schliessen mit der Spur: Da \mathfrak{g} halb-einfach ist, gilt $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, und daher für $y \in \mathfrak{g}$, $\text{tr}_V y = 0$. Also ist

$$\alpha \dim V = \text{tr}_V x_s = \text{tr}_V x = 0 \tag{7.51}$$

OEΔ

²Beachte: Es reicht nicht aus, zu zeigen, dass $\text{ad}_{x_s}^V(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$. Erst $x_s \in \mathfrak{g}$ macht aus $\text{ad}_{x_s}^V|_{\mathfrak{g}} = \text{ad}_{x_s}$ Sinn, impliziert $\text{ad}_{x_s} = \text{ad}_s$ und dann $x_s = s$.

§ 7.3 Cartan-Unteralgebren und Wurzelräume

Wir wenden uns nun der Verallgemeinerung der Strukturen aus § 7.1 auf allgemeine halb-einfache Lie-Algebren zu. Die erste zu treffende Wahl ist die Identifikation eines Analogons der Unteralgebra \mathfrak{h} der spurlosen Diagonalmatrizen, (7.4).

7.3.1 Cartan-Unteralgebren

Definition 7.9. Sei \mathfrak{g} eine (nicht-triviale) halb-einfache komplexe Lie-Algebra. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heisst Cartan-Unterlagebra (CUA) falls gilt:

- (i) $\forall x \in \mathfrak{h}$ ist $\text{ad}_x^{\mathfrak{g}}$ halb-einfach.³
- (ii) \mathfrak{h} ist maximal mit dieser Eigenschaft, d.h. falls $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h}$ mit $\text{ad}_x^{\mathfrak{g}}$ halb-einfach $\forall x' \in \mathfrak{h}'$, so folgt $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$.

Lemma 7.10. (i) Es existieren halb-einfache Elemente in \mathfrak{g} , jedenfalls ist $\dim \mathfrak{h} > 0$.
(ii) Eine CUA ist abelsch.

Beweis. (i) Die Jordan-Zerlegung findet in \mathfrak{g} statt. Wären alle Elemente nilpotent so wäre nach dem Satz von Engel \mathfrak{g} selbst nil-potent.

(ii) Angenommen, \mathfrak{h} ist nicht-abelsch. Dann existiert ein $x \in \mathfrak{h}$ mit $\text{ad}_x|_{\mathfrak{h}} \neq 0$. Da \mathfrak{h} eine Unteralgebra ist, gilt $\text{ad}_x(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, und da ad_x auf \mathfrak{g} halb-einfach ist, ist es dies auch auf \mathfrak{h} . Es existiert also ein Eigenwert $\lambda \neq 0$ und $y \in \mathfrak{h}$, $y \neq 0$ mit $[x, y] = \lambda y$. Schreiben wir dies als $[y, x] = -\lambda y \neq 0$ so folgt $y \in \text{Ker}((\text{ad}_x)^2) \setminus \text{Ker}(\text{ad}_x)$. Dann aber ist y nicht halb-einfach. Widerspruch. OEΔ

· Für gegebene CUA können wir nach allgemeinen Betrachtungen aus der linearen Algebra \mathfrak{g} zerlegen in die gemeinsamen Eigenräume von $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$. Für $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ sei

$$\mathfrak{g}_{\alpha} := \bigcap_{h \in \mathfrak{h}} \text{Ker}(\text{ad}_h - \alpha(h)) \quad (7.52)$$

Dann ist $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0$ für nur endlich viele α , ausserdem

$$\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{y \in \mathfrak{g}, [h, y] = 0 \forall h \in \mathfrak{h}\} \quad (7.53)$$

dem Zentralisator von \mathfrak{h} .

Definition 7.11. Die $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ mit $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0$ heissen Wurzeln von \mathfrak{g} relativ zu \mathfrak{h} . Die Menge Φ der Wurzeln ist endlich und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (7.54)$$

heisst Wurzelraum-(oder Cartan-)Zerlegung .

· Da \mathfrak{h} eine abelsche Unteralgebra ist, gilt $\mathfrak{h} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Bei $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ hatten wir mit blosssem Auge gesehen, dass sogar $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.

³Das gelegentlich hochgestellte \mathfrak{g} soll daran erinnern, dass wir die adjungierte Darstellung auf ganz \mathfrak{g} anschauen.

Proposition 7.12. *Es gilt $\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0$ für jede CUA einer halb-einfachen Lie-Algebra.*

· Der Beweis hängt von einigen Eigenschaften des Wurzelsystems ab, die wir erst getrennt aufschreiben. Ebenso die folgende Aussage (die wir nicht beweisen).

Fakt/Definition 7.13. · Sind \mathfrak{h} und \mathfrak{h}' zwei CUA einer halb-einfachen Lie-Algebra, so existiert ein $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})_0$ (der Zusammenhangskomponente der Identität in der Automorphismengruppe von \mathfrak{g} , a.b.a. die adjungierte Form von \mathfrak{g}) mit $g(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$.
· Insbesondere hängt $\dim \mathfrak{h}$ nicht von der Wahl von \mathfrak{h} ab. Diese invariante Dimension heisst *der Rang* von \mathfrak{g} .

· Für eine häufig benutzte Alternative sei für $h \in \mathfrak{g}$ ad-halb-einfach

$$Z_{\mathfrak{g}}(h) := \{x \in \mathfrak{g}, [h, x] = 0\} \quad (7.55)$$

Fakt 7.14. (i) $\text{Rang}(\mathfrak{g}) = r = \min\{\dim Z_{\mathfrak{g}}(h), h \in \mathfrak{g} \text{ ad-h.e.}\}$
(ii) Für $h \in \mathfrak{g}$ h.e. mit $\dim Z_{\mathfrak{g}}(h) = \text{Rang}(\mathfrak{g})$ (ein solches h heisst *regulär*) ist $Z_{\mathfrak{g}}(h)$ eine CUA.

· Für die Darstellungstheorie ist es als Folgerung aus dem letzten § wichtig, dass für jede Darstellung (V, ρ) von \mathfrak{g} $\rho(\mathfrak{h})$ eine abelsche Unter algebra halb-einfacher Endomorphismen von V ist (Theorem 7.8). Wir können daher V zerlegen als

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_{\lambda} \quad (7.56)$$

in gemeinsame Eigenräume von $\rho(h)$ für $h \in \mathfrak{h}$, d.h.

$$\rho(h)|_{V_{\lambda}} = \lambda(h) \quad \forall h \in \mathfrak{h} \quad (7.57)$$

Die λ mit $V_{\lambda} \neq 0$ heissen *Gewichte* der Darstellung.

Beispiel 7.15. Die $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ aus §7.1 sind die Gewichte der “definierenden” n -dimensionalen Darstellung von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

· Das Studium der Gewichte ist fundamental für die Darstellungstheorie von \mathfrak{g} . Sie stehen in enger Beziehung zu den Casimir-Invarianten.

· Die nicht-verschwindenden Gewichte der adjungierten Darstellung sind genau die Wurzeln von \mathfrak{g} , denen wir uns nun im Detail zuwenden.

7.3.2 Orthogonalität

Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi, \mathfrak{g}_{\alpha}$ wie zuvor.

Lemma 7.16. *Für $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ gilt:*

(i)

$$[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \begin{cases} \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \in \Phi \cup \{0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.58)$$

(ii) Falls $\alpha + \beta \neq 0$, so ist $\mathfrak{g}_{\alpha} \perp \mathfrak{g}_{\beta}$ bezüglich der Killing-Form $B_{\mathfrak{g}}$.

7.3. CARTAN-UNTERALGEBREN UND WURZELRÄUME

Beweis. (i) folgt aus der Jacobi-Identität. Vgl. auch Lemma 6.25 für eine stärkere Aussage über verallgemeinerte Eigenräume.

(ii) Falls $\alpha + \beta \neq 0 \in \mathfrak{h}^*$, so existiert ein $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha + \beta(h) \neq 0$. Dann gilt für $x_{\alpha, \beta} \in \mathfrak{g}_{\alpha, \beta}$ wegen der ad-Invarianz von B

$$0 = B(\text{ad}_h(x_\alpha), x_\beta) + B(x_\alpha, \text{ad}_h(x_\beta)) = (\alpha(h) + \beta(h))B(x_\alpha, x_\beta) \quad (7.59)$$

und es folgt $B(x_\alpha, x_\beta) = 0$

OEΔ

Korollar 7.17. (i) Insbesondere ist $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\alpha$ und daher

(ii) ist $B|_{\mathfrak{g}_0}$ ($\neq B_{\mathfrak{g}_0}$!!) nicht-entartet.

(iii) Für $\alpha \in \Phi$ ist auch $-\alpha \in \Phi$ und $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\beta$

Beweis von Prop. 7.12. (Beh: $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$)

· Für $x \in \mathfrak{g}_0$ sei $x = s + n$ die abstrakte Jordan-Zerlegung (in \mathfrak{g}). Nach Prop. 6.17 ist

$$\text{ad}_s^{\mathfrak{g}} = (\text{ad}_x^{\mathfrak{g}})_s \in \text{ad}_x^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}[\text{ad}_x^{\mathfrak{g}}] \quad (7.60)$$

und daher wegen $\text{ad}_x(\mathfrak{h}) = 0$ auch $\text{ad}_s(\mathfrak{h}) = 0$. Also sind $s, n \in \mathfrak{g}_0$. Dann sind für $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + s \cdot \mathbb{C}$ alle $x' \in \mathfrak{h}'$ halb-einfach. ($[s, \mathfrak{h}] = 0$ und die Summe kommutierender halb-einfacher Elemente ist wieder halb-einfach.) Wegen der Maximalität von \mathfrak{h} folgt $s \in \mathfrak{h}$.

· M.a.W. findet die abstrakte Jordan-Zerlegung von \mathfrak{g}_0 vollständig in \mathfrak{g}_0 statt und alle halb-einfachen Elemente liegen in \mathfrak{h} .

· Nach Lemma 7.16 ist \mathfrak{g}_0 eine Unteralgebra und nach Korollar 7.17 ist $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_0}$ ein ad-invariantes inneres Produkt. \mathfrak{g}_0 ist also reduktiv und nach 6.27 gilt

$$\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}_0} \oplus [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \quad (7.61)$$

$$\cup$$

$$\mathfrak{h}$$

· Wäre der halb-einfache Teil $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \neq 0$, so gäbe es (vgl. Lemma 7.10) ein nicht-verschwindendes $\text{ad}^{[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]}$ -halbeinfaches Element $s \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$. Da aber wegen Theorem 7.8 die abstrakte Jordan-Zerlegung in $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ mit der in \mathfrak{g} übereinstimmt, wäre $s \in \mathfrak{h} \subset Z_{\mathfrak{g}_0}$, was nicht sein kann. \mathfrak{g}_0 ist also abelsch.

· Ist nun $x \in \mathfrak{g}_0$, $x = s + n$ mit $n \in \mathfrak{g}_0$ nilpotent, so folgt aus $[n, x] = 0 \forall x \in \mathfrak{g}_0$, dass

$$B_{\mathfrak{g}}(x, n) = \text{tr}_{\mathfrak{g}} \text{ad}_x^{\mathfrak{g}} \circ \text{ad}_n^{\mathfrak{g}} = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}_0 \quad (7.62)$$

Wegen der Nicht-Entartetheit von $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_0}$ folgt $n = 0$. Also ist $x = s$ halb-einfach und daher $x \in \mathfrak{h}$.

OEΔ

Wir halten noch fest

Lemma 7.18. $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\Phi) = \mathfrak{h}^*$

Beweis. Angonmmen, $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\Phi) \neq \mathfrak{h}^*$. Dann existiert ein $h \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ mit $\alpha(h) = 0 \forall \alpha \in \Phi$. Es folgt $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0 \forall \alpha \in \Phi$. Wegen $[h, \mathfrak{h}] = 0$ ist dann $h \in Z_{\mathfrak{g}} = 0$, da \mathfrak{g} halb-einfach ist. Widerspruch.

OEΔ

7.3.3 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ Unteralgebren

- Der nächste Schritt ist die Identifikation von den Wurzeln zugeordneten Unter-
algebren und die Zerlegung von \mathfrak{g} in deren irreduzible Darstellungen.
- Wir schreiben dazu den gemäss Kor. 7.17 von $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}}$ gestifteten Isomorphismus
 $\mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$ als $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$, d.h.

$$B(\alpha^\sharp, h) = \alpha(h) \quad \forall h \in \mathfrak{h} \quad (7.63)$$

für die induzierte Matrik auf \mathfrak{h}^* ,

$$B^{-1}(\alpha, \beta) = \beta(\alpha^\sharp) = B(\alpha^\sharp, \beta^\sharp) \quad (7.64)$$

und behaupten

Proposition 7.19. (i) Für jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ ist

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathbb{C} \cdot \alpha^\sharp \quad (\text{also insbesondere ein-dimensional}) \quad (7.65)$$

(ii) Für jedes $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\alpha \neq 0$ existiert ein $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ sodass die von $x_\alpha, x_{-\alpha}, \alpha^\sharp$ erzeugt Lie-Algebra isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist.

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Dann folgt aus der ad-Invarianz von $B = B_{\mathfrak{g}}$ für $h \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} B([x, y], h) &= -B(y, [x, h]) = B(y, [h, x]) \\ &= \alpha(h)B(x, y) \\ &= B(\alpha^\sharp, h)B(x, y) \end{aligned} \quad (7.66)$$

Wegen der Nicht-Entartetheit von $B|_{\mathfrak{h}}$ folgt daraus

$$[x, y] = \alpha^\sharp \cdot B(x, y) \quad (7.67)$$

Sei nun $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $x_\alpha \neq 0$ (es ist ja $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 0$). Da B auf \mathfrak{g} nicht entartet ist, aber $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ für $\alpha + \beta \neq 0$, existiert ein $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $B(x_\alpha, x_{-\alpha}) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [x_\alpha, x_{-\alpha}] &= \alpha^\sharp \cdot B(x_\alpha, x_{-\alpha}) \neq 0 \Rightarrow \text{(i)} \\ [\alpha^\sharp, x_\alpha] &= \alpha(\alpha^\sharp)x_\alpha \\ [\alpha^\sharp, x_{-\alpha}] &= -\alpha(\alpha^\sharp)x_{-\alpha} \end{aligned} \quad (7.68)$$

· Die von $x_\alpha, x_{-\alpha}, \alpha^\sharp$ erzeugte Lie-Unteralgebra $\mathfrak{s}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ ist also drei-dimensional und daher nach 5.5.3 entweder auflösbar oder isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, und zwar letzteres genau dann wenn $\alpha(\alpha^\sharp) = B(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp) \neq 0$. (Es wird sich herausstellen, dass B auf der reellen Hülle der Wurzeln positiv definit ist, bis jetzt wissen wir aber nur, dass es nicht-entartet ist.)

· Wäre \mathfrak{s}_α auflösbar, so wäre nach dem Satz von Lie (Theorem 6.12) in der adjungierten Darstellung auf \mathfrak{g} \mathfrak{s}_α darstellbar durch obere Dreiecksmatrizen. Da gemäss (7.68) $\alpha^\sharp \in [\mathfrak{s}_\alpha, \mathfrak{s}_\alpha]$ wäre dann $\text{ad}_{\alpha^\sharp}^{\mathfrak{g}}$ eine strikt obere Dreiecksmatrix, $\text{ad}_{\alpha^\sharp}^{\mathfrak{g}}$ also nilpotent. Andererseits ist aber $\text{ad}_{\alpha^\sharp}^{\mathfrak{g}}$ halb-einfach, da $\alpha^\sharp \in \mathfrak{h}$. Diese ginge nur, wenn $\alpha^\sharp = 0$, was aber nicht der Fall ist. Es folgt also $\alpha(\alpha^\sharp) \neq 0$, und $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. **OEΔ**

7.3. CARTAN-UNTERALGEBREN UND WURZELRÄUME

· Der Vollständigkeit halber geben wir den Isomorphismus relativ zu unserer Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, vgl. (7.1) an⁴

$$\begin{aligned} h_\alpha &= \frac{2\alpha^\sharp}{\alpha(\alpha^\sharp)} = \frac{2\alpha^\sharp}{B^{-1}(\alpha, \alpha)} \\ e_\alpha &= x_\alpha \\ f_\alpha &= \frac{2}{\alpha(\alpha^\sharp)} \frac{1}{B(x_\alpha, x_{-\alpha})} x_{-\alpha} \end{aligned} \tag{7.69}$$

Bemerkungen. · Die so definierte Unteralgebra \mathfrak{s}_α hängt augenscheinlich von der Wahl eines nicht-verschwindenden $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Obwohl wir gleich sehen werden, dass $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, haben wir jedenfalls noch die Freiheit zur Reskalierung $e_\alpha \mapsto \xi e_\alpha$, $f_\alpha \mapsto \xi^{-1} f_\alpha$, $\xi \neq 0$.

· Zum Unterschied hiervon ist (schon jetzt)

$$h_\alpha := \frac{2\alpha^\sharp}{\alpha(\alpha^\sharp)} \tag{7.70}$$

von solchen Wahlen *unabhängig*. h_α ist sogar unabhängig von der Normierung der Killing-Form (in dem \mathfrak{s}_α enthaltenden Ideal von \mathfrak{g}).

· Man sollte h_α wohl die Kowurzel zu α nennen, diese Vokabel ist aber im allgemeinen für das damit identifizierte

$$\alpha^\vee = h_\alpha^\flat = \frac{2\alpha}{B^{-1}(\alpha, \alpha)} \tag{7.71}$$

reserviert.

· Im Anschluss an Lemma 7.18 halten wir noch fest

$$\text{Span}_{\mathbb{C}}\{h_\alpha, \alpha \in \Phi\} = \mathfrak{h} \tag{7.72}$$

7.3.4 Integralität

Wie schon erwähnt ist nun für jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale Darstellung von \mathfrak{s}_α (welche zunächst noch von der Wahl von $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ abhängt), und zerfällt gemäss Thm. 7.7 als direkte Summe von Irreps V_l aus 5.5.4. Wir untersuchen nun diese Zerlegung, und betrachten zunächst den invarianten Unterraum

$$\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{c \in \mathbb{C}^\times} \mathfrak{g}_{c\alpha} \tag{7.73}$$

1. Schritt: Es gilt (zunächst als Vektorraum)

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C} \cdot h_\alpha \oplus \text{Ker}(\alpha) \tag{7.74}$$

aber aus $[e_\alpha, h] = 0$ für $h \in \text{Ker}(\alpha)$ folgt, dass diese Zerlegung auch auf dem Niveau von Darstellungen gilt. M.a.W. enthält \mathfrak{m}_α eine 3-dim. Darstellung (nämlich

⁴I am too weak at the moment to lift the α upstairs as I had initially planned, cf. (7.9) in § 7.1.

\mathfrak{s}_α selbst) sowie $r - 1$ ein-dimensionale Darstellungen (nämlich $\text{Ker}(\alpha)$) von \mathfrak{s}_α . Wir schreiben dies als

$$\mathfrak{m}_\alpha = \underbrace{\text{Ker}(\alpha) \oplus \mathfrak{s}_\alpha}_{\supset \text{Ker ad}_{h_\alpha}^{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{m}_\alpha} \oplus \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_l^{\oplus a_l} \quad (7.75)$$

mit Multiplizitäten $a_l \geq 0$.

2. Schritt: Da gemäss 5.5.4 wie in jeder endlich-dimensionalen Darstellung ad_{h_α} nur ganzzahlige Eigenwerte hat, aber andererseits in \mathfrak{m}_α

$$\text{ad}_{h_\alpha}|_{\mathfrak{g}_\alpha} = c\alpha(h_\alpha) = 2c \quad (7.76)$$

folgt $\mathfrak{g}_{c\alpha} = 0$ falls $c \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

· Weiterhin ist $\text{Ker ad}_{h_\alpha}|_{V_l}$ ein-dimensional falls $l \in 2\mathbb{Z}$ und 0 falls $l \in 2\mathbb{Z} + 1$. Also ist

$$r \stackrel{(7.73)}{=} \dim \text{Ker ad}_{h_\alpha}|_{\mathfrak{m}_\alpha} \stackrel{(7.75)}{=} r + \sum_{l \in 2\mathbb{Z}} a_l \quad (7.77)$$

Es folgt also $a_l = 0$ falls $l \in 2\mathbb{Z}$ und daher $\mathfrak{g}_{c\alpha} = 0$ falls $c \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$, sowie

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in \Phi \quad (7.78)$$

· Insbesondere gilt: 2α ist keine Wurzel, falls α eine Wurzel ist. Wäre dann umgekehrt $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}\alpha} \neq 0$, d.h. $\frac{1}{2}\alpha \in \Phi$, so wäre $\mathfrak{g}_\alpha = 0$, was aber nicht der Fall ist. Da jedes V_l für $l \in 2\mathbb{Z} + 1$ einen Eigenraum von ad_{h_α} mit Eigenwert $\frac{1}{2}\alpha(h_\alpha) = 1$ enthielte, folgt daraus, dass $a_l = 0$ auch für solche l . Es ist also $\mathfrak{g}_{c\alpha} = 0$ ausser für $c = \pm 1$.

3. Schritt: Zur Untersuchung der zu \mathfrak{m}_α komplementären Darstellung von \mathfrak{s}_α sei $\beta \in \Phi \setminus \{\alpha, -\alpha\}$. Dann folgt aus $\text{ad}_{h_\alpha}|_{\mathfrak{g}_\beta} = \beta(h_\alpha)$, $\mathfrak{g}_\beta \neq 0$, und den Resultaten aus 5.5.4, dass

$$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad (7.79)$$

Ausserdem muss die aus \mathfrak{g}_β (mit $\dim \mathfrak{g}_\beta = 1!$) gemäss 5.5.4 erzeugte irreduzible Unterdarstellung von \mathfrak{s}_α auf \mathfrak{g} isomorph sein zu einem V_l für ein $l \geq 0$. Es existieren also $k_{\min}, k_{\max} \in \mathbb{Z}$ sodass

$$V_l \cong \bigoplus_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \quad (7.80)$$

wobei

$$\begin{aligned} l &= \beta(h_\alpha) + 2k_{\max} = -(\beta(h_\alpha) + 2k_{\min}) \\ &\Rightarrow \beta(h_\alpha) = k_{\max} - k_{\min} \end{aligned} \quad (7.81)$$

Ausserdem ist $\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = 0$ falls $k \in \mathbb{Z} \setminus \{k_{\min}, \dots, k_{\max}\}$. (Allgemeiner ist ja auch $\mathfrak{g}_{\beta+c\alpha} = 0$ für $c \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$; $c \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ist allenfalls noch möglich.)

Wir fassen zusammen:

Lemma 7.20. Für die Menge $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ der Wurzeln und die zugehörigen Wurzelräume \mathfrak{g}_α , $\alpha \in \Phi$ einer halb-einfachen Lie-Algebra gilt: $\forall \alpha \in \Phi$:

- (i) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$
- (ii) $\Phi \cap \mathbb{C} \cdot \alpha = \{\alpha, -\alpha\}$

7.3. CARTAN-UNTERALGEBREN UND WURZELRÄUME

und $\forall \alpha \neq \pm\beta \in \Phi$:

(iii) $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ (zur Erinnerung, $\alpha(h_\alpha) = 2$)

(iv) $\exists k_{\min}, k_{\max} \in \mathbb{Z}$ sodass $(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap \Phi = \{\beta + k_{\min}\alpha, \dots, \beta + k_{\max}\alpha\}$ (der α -String durch β).

OEΔ

7.3.5 Rationalität und Positivität

Wir hatten schon in Lemma 7.18 gesehen, dass $\text{Span}_{\mathbb{C}} \Phi = \mathfrak{h}^*$, ein r -dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum. (Wo $r = \text{Rang}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{h}$.) Tatsächlich gilt:

Proposition 7.21. (i) $\Phi_{\mathbb{Q}} := \text{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi =: \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ ist ein r -dimensionaler \mathbb{Q} -Vektorraum, und $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^* \otimes \mathbb{C}$.

(ii) $(\Phi_{\mathbb{Q}})^* = \text{Span}_{\mathbb{Q}}\{h_\alpha, \alpha \in \Phi\} =: \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$

(iii) $B|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}}$ ist positiv definit (und damit $B^{-1}|_{\Phi_{\mathbb{Q}}}$ ebenso).

Beweis. (i) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Phi$ r linear unabhängige Wurzeln, also eine \mathbb{C} -Basis von \mathfrak{h}^* . Dann können wir jedes $\beta \in \Phi$ schreiben als

$$\beta = \sum_{i=1}^r c_i \alpha_i \quad c_i \in \mathbb{C} \quad (7.82)$$

Auswerten auf $h_{\alpha_j} \in \mathfrak{h}$, $j = 1, \dots, r$ gibt

$$\beta(h_{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^r c_i \alpha_i(h_{\alpha_j}) \quad (7.83)$$

Nun ist wegen (7.69),

$$\alpha_i(h_{\alpha_j}) = \frac{2}{B(\alpha_j^\#, \alpha_j^\#)} \alpha_i(\alpha_j^\#) = \frac{2}{B(\alpha_j^\#, \alpha_j^\#)} B^{-1}(\alpha_i, \alpha_j) \quad (7.84)$$

Ausserdem ist $(B^{-1}(\alpha_i, \alpha_j))_{i,j=1,\dots,r}$ als Darstellung der nicht-entarteten Killing-Form auf \mathfrak{h} in der \mathbb{C} -Basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ nicht entartet. $(\alpha_i(h_{\alpha_j}))_{i,j}$ unterscheidet sich davon nur durch Multiplikation mit einer Diagonalmatrix und ist daher auch nicht entartet, und hat Einträge in \mathbb{Z} . Wegen $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ folgt damit, dass in (7.82) $c_i \in \mathbb{Q}$.

(ii) Ist klar. $(\alpha(h_\beta) \in \mathbb{Z} \Rightarrow h_\beta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = (\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*)^*$, ausserdem gilt (7.72).)

(iii) Für $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ gilt $\alpha(h) \in \mathbb{Q} \forall \alpha \in \Phi$, und daher nach der ursprünglichen Definition von B :

$$B(h, h) = \text{tr}_{\mathfrak{g}} \text{ad}_h \text{ad}_h = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h) \alpha(h) > 0 \quad \text{für } h \neq 0 \quad (7.85)$$

OEΔ

§ 7.4 Klassifikation von Wurzelsystemen

Wir fassen die Ergebnisse des vorherigen § auf als *geometrische* Aussagen über die Menge Φ der Wurzeln einer halb-einfachen komplexen Lie-Algebra \mathfrak{g} relativ zu einer CUA \mathfrak{h} , $\dim \mathfrak{h} = \text{Rang}(\mathfrak{g}) = r$, und den umgebenden Vektorraum $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^* = \Phi_{\mathbb{Q}}$ (allenfalls noch $\otimes \mathbb{R}$), welcher ausgerüstet mit dem Inversen/Dualen B^{-1} der Killing-Form zu einem *euklidischen Vektorraum* wird. Es gelten dann:

- (i) $\Phi \subset \Phi_{\mathbb{Q}}$ ist endliches Erzeugendensystem.
- (ii) $0 \notin \Phi$.
- (iii) Für $\alpha \in \Phi$ ist $\Phi \cap \mathbb{Q} \cdot \alpha = \{\alpha, -\alpha\}$
- (iv) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ ist die Kombination

$$\beta(h_{\alpha}) = \frac{2}{B^{-1}(\alpha, \alpha)} B^{-1}(\beta, \alpha) = B^{-1}(\beta, \alpha^{\vee}) \in \mathbb{Z} \quad (7.86)$$

- (v) Für $\alpha \in \Phi$ bildet die Reflektion von $\Phi_{\mathbb{Q}}$ an der Hyperfläche α^{\perp} Φ auf sich selbst ab, d.h. $\forall \beta \in \Phi$ ist

$$\sigma_{\alpha}(\beta) = \beta - 2 \frac{B^{-1}(\beta, \alpha)}{B^{-1}(\alpha, \alpha)} \alpha = \beta - \beta(h_{\alpha}) \alpha \in \Phi \quad (7.87)$$

· Wir zäumen nun das Pferd vom Schwanze auf und nennen eine endliche Teilmenge Φ eines euklidischen Vektorraums mit den obigen Eigenschaften (i)–(v) ein *Wurzelsystem* (vom Rang r).

· Die ursprüngliche Lie-Algebra kommt dann nicht mehr vor, sodass nicht klar ist, dass

- (1) jedes Wurzelsystem von einer Lie-Algebra kommt
- (2) nicht-isomorphe Lie-Algebren nicht-isomorphe Wurzelsysteme haben.

Beides ist aber richtig, sodass die Klassifikation der halb-einfachen Lie-Algebren über \mathbb{C} äquivalent ist zur Klassifikation der Wurzelsysteme.

· Intuitiv ist klar, dass dabei unzerlegbare Wurzelsysteme ($\Phi = \Phi_1 \perp \Phi_2 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi$ oder $\Phi_2 = \Phi$) zu einfachen Lie-Algebren gehören.

· Wir diskutieren hier jedenfalls nicht weiter die Rekonstruktion (welche in gewissem Sinne natürlich der interessantere Teil ist), sondern referieren nur die Zutaten der Klassifikation, deren bemerkenswerter Aspekt die Überschaubarkeit ist.

· Zunächst zwei Beispiele:

Beispiel 7.22. (1) $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ $r = 2$. Die Notation aus § 7.1 an die neuen Erkenntnisse angleichend (vgl. Fussnote zu (7.69) auf S. 105) sei

$$\begin{aligned} h_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = h_{\alpha_1} & \text{mit } e_{\alpha_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{etc.} \\ h_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = h_{\alpha_2} & \text{mit } e_{\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{etc.} \end{aligned} \quad (7.88)$$

7.4. KLASSIFIKATION VON WURZELSYSTEMEN

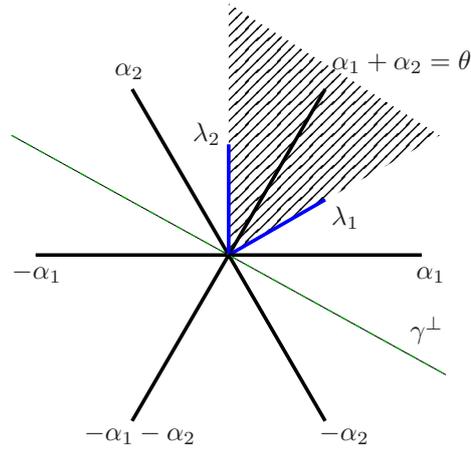


Abbildung 7.1: Wurzelsystem von $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

$\{h_1, h_2\}$ ist eine Basis von \mathfrak{h} und in der Dualbasis $\lambda_i(h_i) = \delta_{ij}$ sind die drei positiven Wurzeln

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \alpha_2 &= -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \alpha_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned} \tag{7.89}$$

und daher hat $B|_{\mathfrak{h}}$ in der Basis $h_{1,2}$ die Form

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} \propto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.90}$$

Für die Vorstellung am besten ist dabei die graphische Darstellung in Abb. 7.1

(2) $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ $r = 2$. Wir weichen mit Vorsicht wieder von der Notation aus den Übungen ab und heissen:

$$\begin{aligned} h_{\alpha_1} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } e_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{etc.} \\ h_{\alpha_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } e_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{7.91}$$

Die Wurzeln sind in der Dualbasis $\lambda_i(h_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$ gegeben durch

$$\{\pm(2\lambda_1 - 2\lambda_2), \pm(2\lambda_2 - \lambda_1), \pm 2\lambda_2, \pm\lambda_1\} \tag{7.92}$$

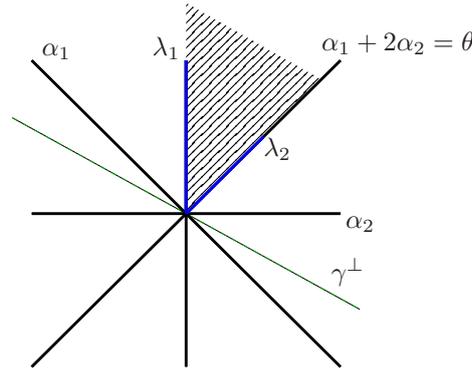


Abbildung 7.2: Wurzelsystem von $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$

sodass in der Basis $\{h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}\}$ von \mathfrak{h} :

$$B \propto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} \propto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.93)$$

was zur Abb. 7.2 führt.

Für die Untersuchung eines allgemeinen Wurzelsystems verfährt man nun folgendermassen:

(1) Falls $\gamma \in \Phi_{\mathbb{Q}}$ derart, dass die Hyperfläche senkrecht zu γ disjunkt von Φ ist, so teilt diese Hyperfläche Φ in die zwei Gruppen der *positiven* und *negativen* Wurzeln:

$$\Phi^{\pm} = \pm\{\alpha \in \Phi, B^{-1}(\alpha, \gamma) > 0\} =: \{\alpha > 0\} \quad (7.94)$$

(Man vergleiche dies mit (7.14).)

(2) Innerhalb von Φ^+ identifiziert man eine Teilmenge von r ($= \dim_{\mathbb{Q}} \Phi_{\mathbb{Q}}$) *einfachen Wurzeln*, die “am nächsten an γ^{\perp} ” liegen, und die Eigenschaft haben, dass sich jede positive Wurzel als positive⁵ (ganzzahlige) Linearkombination der einfachen Wurzeln schreiben lässt. Die einfachen Wurzeln spannen dann über \mathbb{Z} das sog. *Wurzelgitter* in $\Phi_{\mathbb{Q}}$ auf. (Bei $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ gehören die bezüglich der Anordnung (7.14) einfachen Wurzeln zu den $e_{i,i+1}$ für $i = 1, \dots, n - 1$.)

(3) Etwas dual zu dem Obigen kann man das Komplement der zu den Wurzeln orthogonalen Hyperflächen in Zusammenhangskomponenten zerlegen, welche *Weyl-Kammern* genannt werden.

$$\Phi_{\mathbb{Q}} \setminus (\cup_{\alpha \in \Phi} \alpha^{\perp}) = \cup \{\text{Weyl-Kammern}\} \quad (7.95)$$

(4) Es existieren dann bijektive Korrespondenzen zwischen

- (a) Basen von $\Phi_{\mathbb{Q}}$ mit der Eigenschaft, dass jede Wurzel entweder im positiven oder im negativen Kegel dieser Basis liegen,
- (b) oben beschriebenen Anordnungen von $\Phi_{\mathbb{Q}}$ (die Basis sind gerade die zugehörigen einfachen Wurzeln), und
- (c) dann sog. *fundamentalen* Weyl-Kammern, in denen das entsprechende γ liegt.

⁵Gemeint ist: Nicht-null und kein Koeffizient ist negativ.

7.4. KLASSIFIKATION VON WURZELSYSTEMEN

(5) Auf der Menge solcher Basen und Weyl-Kammern wirkt dann frei und transitiv die *Weyl-Gruppe*

$$W = \langle \sigma_\alpha; \alpha \in \Phi \rangle = \langle \sigma_{\alpha_i}; \alpha_i \text{ einfach} \rangle \quad (7.96)$$

welche durch die Reflektionen (7.87) an den orthogonalen Hyperflächen zu allen, oder auch nur zu einem Satz einfacher, Wurzeln erzeugt wird.

(6) Die Weyl-Gruppe ist damit eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe auf Φ und an dieser Konfluenz würde die Darstellungstheorie endlicher Gruppen ein erfolgreiches Comeback feiern. Im Allgemeinen ist W nicht gleich $S_{|\Phi|}$, und wirkt auch nicht transitiv auf den Wurzeln.

(7) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ folgt aus

$$\begin{aligned} \alpha(h_\beta) &= 2 \frac{B^{-1}(\alpha, \beta)}{B^{-1}(\beta, \beta)} \\ \beta(h_\alpha) &= 2 \frac{B^{-1}(\beta, \alpha)}{B^{-1}(\alpha, \alpha)} \end{aligned} \quad (7.97)$$

dass falls $B^{-1}(\alpha, \beta) \neq 0$

$$\frac{B^{-1}(\alpha, \alpha)}{B^{-1}(\beta, \beta)} = \frac{\alpha(h_\beta)}{\beta(h_\alpha)} \in \mathbb{Q} \quad (7.98)$$

sodass falls Φ unzerlegbar ist, alle Verhältnisse von Wurzellängenquadraten rational sind.

(8) Erinnern wir uns nun an die elementargeometrische Formel

$$1 \geq \cos^2(\angle(\alpha, \beta)) = \frac{B^{-1}(\alpha, \beta)^2}{B^{-1}(\alpha, \alpha)B^{-1}(\beta, \beta)} = \frac{\alpha(h_\beta)\beta(h_\alpha)}{4} \quad (7.99)$$

so erkennen wir, dass die Geometrie nur eine sehr begrenzte Anzahl von Möglichkeiten für die ganzen Zahlen $\alpha(h_\beta)$ ($\alpha \nparallel \beta$) erlaubt:

$(\alpha(h_\beta), \beta(h_\alpha))$	$\angle(\alpha, \beta)$	$B^{-1}(\beta, \beta)/B^{-1}(\alpha, \alpha)$
(0, 0)	$\pi/2$?
(1, 1)	$\pi/3$	1
(-1, -1)	$2\pi/3$	1
(1, 2)	$\pi/4$	2
(-1, -2)	$3\pi/4$	2
(1, 3)	$\pi/6$	3
(-1, -3)	$5\pi/6$	3

In einem unzerlegbaren Wurzelsystem kommen höchstens zwei verschiedene Längen vor. (Falls dies noch nicht gesagt wurde: Die Normierung der euklidischen Form B^{-1} ist für die geometrische Untersuchung irrelevant. Häufig einigt man sich derart, dass die langen Wurzeln Längenquadrat 2 haben.)

(9) An einem der übersprungenen Punkte zeigt man, dass Φ durch einen Satz einfacher Wurzeln $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ vollständig festliegt, und es daher genügt, die $\alpha(h_\beta)$ für diese anzugeben. Dies führt auf den Begriff der *Cartan-Matrix* $(A_{ij})_{i,j=1,\dots,r}$ mit⁶

$$A_{ij} = \alpha_i(h_{\alpha_j}) = B^{-1}(\alpha_i, \alpha_j^\vee) \quad (7.101)$$

⁶Nobody write the second index upstairs!

und des *Dynkin-Diagramms*: Wir zeichnen einen Knoten für jede einfache Wurzel und zwischen dem i -ten und j -ten Knoten eine orientierte Kante der Wertigkeit $\alpha_i(h_j)\alpha_j(h_i)$, jeweils von der längeren zur kürzeren Wurzel.

Theorem 7.23. *Die irreduziblen Wurzelsysteme gehören zu den Dynkin-Diagrammen von der folgenden Liste:*

<u>$A_r, r = 1, 2, \dots :$</u>		$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
<u>$B_r, r = (1), 2, \dots :$</u>		$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
<u>$C_r, r = (1, 2), 3, \dots :$</u>		$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
<u>$D_r, r = (2, 3), 4, \dots :$</u>		$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 2 & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
<u>$E_{6,7,8} :$</u>		$\begin{pmatrix} 2 & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \ddots & 2 & -1 & 0 & -1 \\ \vdots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \ddots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ \cdots & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
<u>$F_4 :$</u>		$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
<u>$G_2 :$</u>		$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(7.102)

Dabei gibt das Subskript den Rang des Wurzelsystems an, also die Zahl der Knoten

7.5. SATZ VON PETER-WEYL

im Diagramm. Die Klammern in den Wertebereichen von r tragen den folgenden Niederrangisomorphismen Rechnung:⁷

$$\begin{aligned} C_1 &\cong B_1 \cong A_1 \\ C_2 &\cong B_2 \\ D_2 &\cong A_1 \oplus A_1 \quad (\text{zerlegbar!}) \\ D_3 &\cong A_3 \end{aligned} \tag{7.103}$$

· Die ABCD Wurzelsysteme gehören zu den Lie-Algebren der klassischen Gruppen:

$$\begin{aligned} A_r &\leftrightarrow \mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}) \\ B_r &\leftrightarrow \mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C}) \\ C_r &\leftrightarrow \mathfrak{sp}(2r, \mathbb{C}) \\ D_r &\leftrightarrow \mathfrak{so}(2r, \mathbb{C}) \end{aligned} \tag{7.104}$$

· Die übrigen 5 Wurzelsysteme und Lie-Algebren sind “exzeptionell”. Abb. 7.3 zeigt G_2 , das dritte irreduzible Wurzelsystem vom Rang 2, dessen Lie-Gruppe wir schon in den Übungen kennengelernt haben.

· In den Abb. 7.1, 7.2 und 7.3 sind auch zu sehen:

- (i) die Trennlinie zwischen positiven und negativen Wurzeln,
- (ii) die fundamentale Weyl-Kammer,
- (iii) die fundamentalen Gewichte $\lambda_i(h_{\alpha_j}) = B^{-1}(\lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ und
- (iv) die höchste Wurzel θ .

· Es gilt: $\alpha_i = \sum_j A_{ij} \lambda_j$, d.h. die *Cartan-Matrix gibt die Koeffizienten der einfachen Wurzeln in der Basis der fundamentalen Gewichte*.

· Das in $(\Phi_{\mathbb{Q}}, B^{-1})$ zum Kowurzelgitter duale Gitter ist das Gewichtsgitter Λ . Aufgefasst als Teilmenge von $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^* \subset \mathfrak{h}^*$ enthält Λ gerade die möglichen Gewichte (im Sinne der Darstellungstheorie, s. (7.57)) von endlich-dimensionalen Darstellungen der zu Φ gehörigen komplexen Lie-Algebra \mathfrak{g} . (Dies folgt im wesentlichen schon aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}_3$ in 5.5.4.)

· Die Bedeutung der fundamentalen Gewichte λ_i ist dann die folgende: Positive Linearkombinationen der λ_i , sog. *dominante Gewichte* (auch charakterisierbar als integrale Gewichte im Abschluss der fundamentalen Weyl-Kammer), bestimmen (relativ zur durch die einfachen Wurzeln bestimmten Ordnung) eindeutig alle möglichen endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellungen von \mathfrak{g} (als sog. Höchstgewichtsdarstellungen). Die höchste Wurzel ist das höchste Gewicht der adjungierten Darstellung.

· Für alles Weitere müssen wir jetzt leider auf die Literatur verweisen.

§ 7.5 Satz von Peter-Weyl

⁷In der D -Serie entspräche $r = 1$ gemäss (7.104) in vernünftiger Weise $\mathfrak{so}(2, \mathbb{C})$, eine abelsche Lie-Algebra.

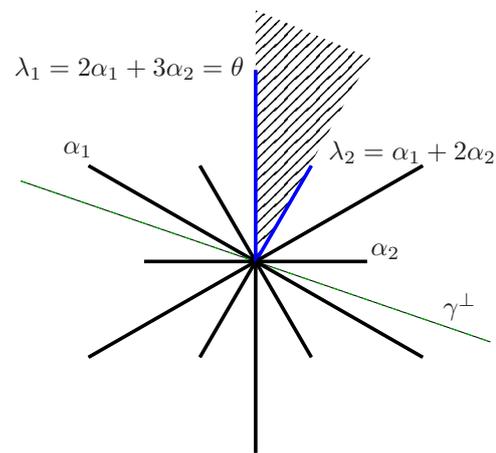


Abbildung 7.3: Wurzelsystem der exzeptionellen Lie-Algebra G_2