

Geometrische Gruppentheorie

Prof. Dr. Petra Schwer

Universität Heidelberg, schwer@uni-heidelberg.de

Wintersemester 2025/26

Vorlesungsskript mit Übungen für ca 28 Vorlesungen á 90 Minuten.

Es wird keine Algebraische Topologie vorausgesetzt. Daher ist an einigen Stellen ein anderer Beweis oder eine leicht umständlichere Formulierung gewählt als es mit der Sprache von Fundamentalgruppen und Überlagerungen möglich wäre.

Mein Dank geht an Marco Lotz, der die erste Version dieses Skriptes getippt hat. Ebenfalls Danke an Paula Conrad fürs Überarbeiten und ganz viel Detailarbeit. Danke an Marco Lotz, Jose Quintanilha, Yuri Santos Rego und Anna Schilling, die über die Jahre all die zahlreichen Übungsaufgaben erdacht und zusammengetragen haben.

Mit Sicherheit haben wir nicht alle Fehler gefunden und nicht jede Stelle ist optimal erklärt. Schicken Sie daher Kommentare und Hinweise gerne an **`schwer@uni-heidelberg.de`**. Danke.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen über Gruppen	1
1.1	Gruppen als Symmetrien von Objekten	1
1.2	Neue Gruppen aus alten	6
1.3	Gruppenwirkungen und Graphen	7
2	Freie Gruppen und Gruppenpräsentierungen	18
2.1	Freie Gruppen	18
2.2	Freie Gruppen und Bäume	23
2.3	Endlich präsentierte Gruppen	33
3	Cayleygraphen und Quasi-Isometrie	40
3.1	Metrische Graphen und geodätische metrische Räume	40
3.2	Cayleygraphen erkennen	46
3.3	Quasi-Isometrie und das Milnor-Švarc Lemma	47
3.4	Quasi-Isometrie-Invarianten	58
4	Hyberbolizität	67
4.1	Hyperbolische Räume	67
4.2	Hyperbolische Gruppen und das Wortproblem	76
5	Weitere Quasi-Isometrie Invarianten	91
5.1	Gruppenwachstum	91
5.2	Enden von Gruppen	98
6	Übungsaufgaben	109
6.1	Grundlagen über Gruppen	109
6.2	Freie Gruppen und Gruppenpräsentierungen	115
6.3	Cayleygraphen und Quasi-Isometrie	120
6.4	Hyberbolizität	125
6.5	Weitere Quasi-Isometrie Invarianten	126
7	Organisatorische Hinweise	127
	Symbolverzeichnis	130

4 Hyperbolizität

In diesem Kapitel lernen wir einen synthetischen Krümmungsbegriff für geodätische metrische Räume kennen. Das Besondere an genau dieser Definition von nicht-positiver Krümmung ist die Tatsache, dass sie invariant ist unter quasi-Isometrie und somit auch als Krümmungsbegriff für Gruppen (via Krümmung ihrer Cayleygraphen) funktioniert. Um zu sehen, wie Krümmung algebraische Eigenschaften der Gruppen beeinflussen kann, werden wir das Wortproblem in diesem Kontext studieren.

4.1 Hyperbolische Räume

Historisch gesehen wurde Krümmung zunächst einmal in der Differentialgeometrie für Mannigfaltigkeiten definiert. Verschiedene Krümmungsbegriffe, wie zum Beispiel der Begriff der Schnittkrümmung, spielen dabei eine wichtige Rolle. Man versucht mit den mathematischen Konzepten von Krümmung greifbar zu machen, wie sich beispielsweise ein 2-dimensionales mathematisches Objekt von einer ebenen Fläche unterscheidet - also wie krumm oder gebogen sie ist. Erst später wurden auch Krümmungsbegriffe für beliebige metrische Räume betrachtet, die die klassischen differentialgeometrischen Konzepte verallgemeinern. Abbildung 4.1 zeigt die drei klassischen Modellräume mit konstanter Schnittkrümmung $\kappa < 0$, $= 0$ und $\kappa > 0$, also negativer, flacher und positiver Krümmung.

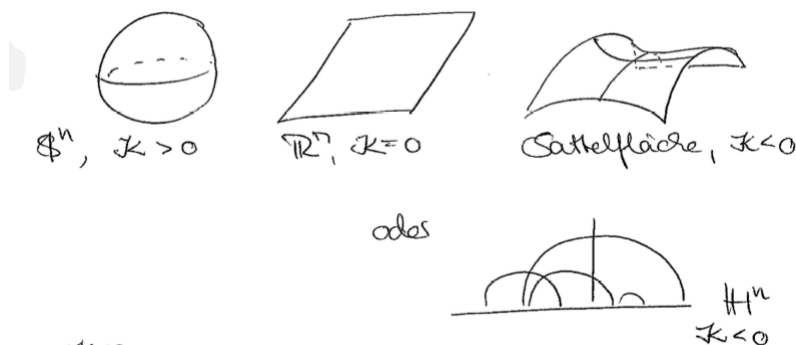


Abbildung 4.1: Modellräume konstanter Krümmung κ .

Im Falle negativer Schnittkrümmung $\kappa < 0$ haben wir es beispielsweise mit Sattelflächen oder hyperbolischen Ebenen zu tun. In Abbildung 4.1 ist das obere Halbebenenmodell der reell-hyperbolischen Ebene skizziert. In dieser Geometrie breiten sich Geodätische schneller aus als in der euklidischen Ebene. Dreiecke sind in dieser Geometrie, wie in Abbildung 4.2 zu sehen ist, dünner als vergleichbare Dreiecke in der euklidischen Ebene. Soll

heißen, die Abstände einer Seitenmitte zu den anderen Seiten sind kleiner als erwartet. Auch metrische Bäume haben (sehr) dünne Dreiecke, die sogar zu Tripods degenerieren.

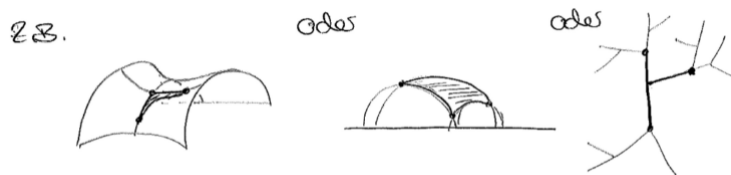


Abbildung 4.2: Dünne Dreiecke.

Wir werden genau diese 'dünne Dreiecke' Eigenschaft formalisieren und damit einen neuen Krümmungsbegriff definieren. Zunächst einmal müssen wir aber formal klären was ein geodätisches Dreieck in einem metrischen Raum ist.

Definition 4.1.1 (Geodätische Dreiecke). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein *geodätisches Dreieck* Δ in X ist ein Tripel von Geodätischen $\gamma_i : [0, l_i] \rightarrow X$, $i = 0, 1, 2$, sodass $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$ für alle i , mit Indizes *mod* 3 gerechnet. Vergleiche Abbildung 4.3

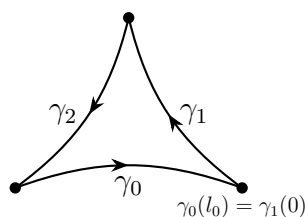


Abbildung 4.3: Skizze eines geodätischen Dreiecks.

Definition 4.1.2 (Dünne Dreiecke und hyperbolische Räume). Für eine gegebene Konstante $\delta \geq 0$ ist ein geodätisches Dreieck δ -*dünn*, wenn gilt

$$\text{im}(\gamma_i) \subseteq U_\delta(\text{im}(\gamma_j) \cup \text{im}(\gamma_k))$$

für $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$. Hierbei ist U_δ die offene δ -Umgebung um die jeweils in Klammern angegebene Menge.

Ein metrischer Raum (X, d) ist δ -*hyperbolisch*, falls er geodätisch ist und alle geodätischen Dreiecke im Raum δ -dünn sind. Wir sagen X ist *hyperbolisch*, falls der Raum δ -hyperbolisch ist für ein geeignetes δ .

Beispiel 4.1.3. Hier ein paar erste (Nicht-)Beispiele für hyperbolische Räume.

1. Geodätische Räume (X, d) mit endlichem Durchmesser sind δ -hyperbolisch, da sogar für jede beliebige Wahl eines Punktes x in X eine Wahl von δ möglich ist so, dass $X \subset U_\delta(x)$.
2. Die euklidische Gerade $(\mathbb{R}, d_{\text{eukl}})$ ist 0-hyperbolisch, da alle Dreiecke zu Geradenstücken degenerieren und eine (geeignet gewählte) der drei Seiten eines jeden Dreiecks die beiden anderen enthält.
3. Die euklidische Ebene $(\mathbb{R}^2, d_{\text{eukl}})$ ist nicht δ -hyperbolisch. Für jedes fest gewählte und beliebig große δ lässt sich ein Dreieck konstruieren, dessen Seiten größeren Abstand zueinander haben und die gewünschte Eigenschaft nicht erfüllen.
4. Die hyperbolische Ebene $(\mathbb{H}, d_{\text{eukl}})$ ist $\ln(3)$ -hyperbolisch (später mehr dazu).
5. Simpliciale Bäume, sowie $\mathbb{R}$ -Bäume sind δ -hyperbolisch für jede beliebige Wahl von δ .

Auch Polygone sind in gewisser Weise noch dünn in einem hyperbolischen Raum. Was genau damit gemeint ist sagt der nächste Satz.

Theorem 4.1.4 (Iterierte Dünnheit). *Sei (X, d) ein δ -hyperbolischer Raum. Sei P ein geodätisches Polygon, das heißt eine Menge von Ecken $x_0, x_1, \dots, x_n$ und Geodätischen $s_i : x_{i-1} \rightsquigarrow x_i$, $i = 1, \dots, n$, sowie $s_0 : x_0 \rightsquigarrow x_n$. Setze $Y := \bigcup_{i=1}^n \text{im}(s_i)$. Dann gilt für alle $x \in \text{im}(s_0)$, dass $d(x, Y) \leq k \cdot \delta$ mit $k := \lceil \log_2(n) \rceil$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für $n = 2^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$ mit Induktion über l . Man muss dafür zeigen, dass $d(x, Y) \leq l \cdot \delta$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Für $l = 1$ ist $n = 2$ und die Behauptung folgt direkt aus Definition 4.1.2.

Für den Schritt $l \mapsto (l + 1)$ gehen wir wie folgt vor. Es gelte nach Induktionsvoraussetzung die Aussage für 2^l . Wir betrachten $n = 2^{l+1}$. Wähle einen festen Punkt $x \in \text{im}(s_0)$ und geodätische Segmente $[x_0, x_{2^l}]$ und $[x_n, x_{2^l}]$ wie in Abbildung 4.4.

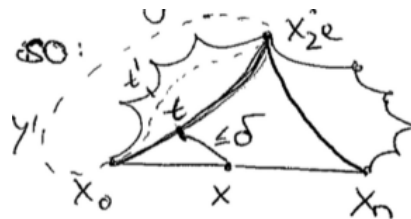


Abbildung 4.4: Wahl der geodätischen Segmente.

Nach Induktionsvoraussetzung ist das Dreieck auf den Ecken x_0, x_{2^l}, x_n mit den oben gewählten geodätischen Segmenten δ -dünn. Somit existiert ein $t \in [x_0, x_{2^l}] \cup [x_n, x_{2^l}]$, sodass $d(x, t) \leq \delta$.

Sei ohne Einschränkung $t \in [x_0, x_{2^l}]$ wie auch in Abbildung 4.4 oben skizziert. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann für $Y' = \bigcup_{i=1}^{2^l} \text{im}(s_i)$, dass $d(t, Y') \leq l \cdot \delta$. Also existiert $t' \in Y'$ mit $d(t, t') = d(t, Y') \leq l \cdot \delta$. Das impliziert, mit Anwendung von Dreiecksungleichung für die ersten beiden Abschätzungen, dass

$$d(x, Y) \leq d(x, t') \leq d(x, t) + d(t, t') \leq \delta + l \cdot \delta = (1 + l) \cdot \delta.$$

Sei jetzt N beliebig. Füge r zusätzliche Stützpunkte auf den n geodätischen Stücken hinzu, sodass $n+r = 2^l$ mit $l = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Mit obigem Beweis folgt die Behauptung. $\square$

Wir wollen nachfolgend zeigen, dass hyperbolisch zu sein unter quasi-Isometrie erhalten bleibt. Problem dabei ist, dass das Bild eines geodätischen Dreiecks unter einer quasi-Isometrie im Allgemeinen kein geodätisches Dreieck mehr ist. Aus diesem Grund müssen wir zunächst sowohl den Begriff eines Dreiecks als auch die δ -Dünnheit allgemeiner fassen.

Definition 4.1.5 (quasi-geodätische Dreiecke). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien $C \geq 1$ und $D \geq 1$ gegebene Konstanten. Ein (C, D) -*quasi-geodätisches Dreieck* in X ist ein Tripel γ_i von (C, D) -quasi-Geodätischen $\gamma_i : [0, l_i] \rightarrow X$, $i = 0, 1, 2$ mit $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$, wobei Indizes zyklisch gelesen werden.

Analog zum klassischen Fall definieren wir Dünnheit für quasi-Dreiecke.

Definition 4.1.6 (quasi-hyperbolisch). Ein (C, D) -quasi-geodätisches Dreieck ist δ -dünn, wenn für $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ gilt

$$\text{im}(\gamma_i) \subseteq U_\delta(\text{im}(\gamma_j) \cup \text{im}(\gamma_k)).$$

Ein metrischer Raum (X, d) heißt (C, D, δ) -*quasi-hyperbolisch*, falls X ein (C, D) -quasi-geodätischer Raum ist und alle (C, D) -quasi-geodätischen Dreiecke δ -dünn sind. Wir sagen X ist *quasi-hyperbolisch*, kurz q.h., falls Konstanten C, D und $\delta > 0$ existieren, sodass der Raum (C, D, δ) -quasi-hyperbolisch ist.

Quasi-hyperbolisch zu sein ist im Allgemeinen noch schwerer nachzurechnen als Hyperbolizität, das es extrem viele quasi-Geodätische und somit auch extrem viele quasi-geodätischen Dreiecke gibt. Uns dient dieser Begriff nur als Werkzeug um zu beweisen, dass Hyperbolizität unter quasi-Isometrie erhalten bleibt.

Proposition 4.1.7 (quasi-hyperbolisch ist QI-invariant). Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ quasi-isometrische metrische Räume, dann sind folgende Äquivalenzen wahr:

1. X ist quasi-geodätisch $\Leftrightarrow Y$ ist quasi-geodätisch
2. X ist quasi-hyperbolisch $\Leftrightarrow Y$ ist quasi-hyperbolisch.

Beweis. Um die erste Äquivalenz zu beweisen sei ohne Einschränkung Y quasi-geodätisch und $f : X \rightarrow Y$ eine quasi-Isometrie. Sei $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so groß, dass Y ein (C, C) -quasi-geodätischer Raum ist und f eine quasi-Isometrie mit C -dichtem Bild. Seien Punkte $x, x' \in X$ gegeben. Dann existiert nach Voraussetzung eine (C, C) -quasi-Geodätische zwischen den Bildern $f(x)$ und $f(x')$. Wir können (mittels Auswahlaxiom) eine Abbildung $\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow X$ finden, für die gilt $\tilde{\gamma}(0) = x$, $\tilde{\gamma}(l) = x'$ und $d_Y(f(\tilde{\gamma}(t)), \tilde{\gamma}(t)) \leq C$ für alle t in $[0, l]$.

Man kann dann nachrechnen, dass $\tilde{\gamma}$ eine $(C, \max(3C^2, 3))$ -quasi-Geodätische ist, die x mit x' verbindet. Der Raum X ist also quasi-geodätisch.

Um die zweite Äquivalenz zu zeigen, sei ohne Einschränkung Y quasi-hyperbolisch und $f : X \rightarrow Y$ eine quasi-Isometrie. Dann folgt aus der ersten Äquivalenz, dass X ebenfalls quasi-geodätisch ist. Es existieren also Konstanten $c \geq 1$ und $d \geq 0$, sodass Y ein (c, d) -quasi-hyperbolischer Raum und X quasi-geodätisch ist.

Seien $c' \geq c, d' \geq d$ gegeben und sei weiter ein (c', d') -quasi-geodätisches Dreieck durch drei quasi-Geodätische $\gamma_i, i = 0, 1, 2$ aufgespannt. Das Bild $(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f \circ \gamma_3)$ ist ein (c'', d'') -quasi-geodätisches Dreieck in Y , wobei $c'' \geq c, d'' \geq d$. Dabei hängen die Konstanten c'', d'' nur von c' und d' ab.

Da Y nach Voraussetzung für ein geeignetes $\delta > 0$ ein (c, d, δ) -quasi-hyperbolischer Raum ist, ist das Dreieck $(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f \circ \gamma_3)$ auch δ -dünn. Man kann nachrechnen, dass dann auch die Inklusionen

$$\text{im}(\gamma_i) \subseteq U_{c\delta+cd}(\text{im}(\gamma_j) \cup \text{im}(\gamma_k))$$

für $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ gelten. Um das einzusehen verwende, dass f eine (c, d) -quasi-isometrische Einbettung ist. Somit ist X ein $(c', d', c\delta + cd)$ -quasi-hyperbolischer Raum. $\square$

Wir haben im Beweis der zweiten Äquivalenz eigentlich folgendes gezeigt: Gegeben metrische Räume X, Y mit Y quasi-hyperbolisch und X quasi-geodätisch. Dann ist X auch quasi-hyperbolisch, wenn eine quasi-isometrische Einbettung $f : X \rightarrow Y$ existiert.

Theorem 4.1.8 (Äquivalenz hyperbolisch und quasi-hyperbolisch). *Ein geodätischer metrischer Raum (X, d) ist genau dann hyperbolisch, wenn er quasi-hyperbolisch ist.*

Aus diesem Satz können wir direkt das folgende Korollar ableiten.

Korollar 4.1.9. *Seien X und Y quasi-isometrische, geodätische metrische Räume. Dann ist X genau dann hyperbolisch, wenn auch Y hyperbolisch ist.*

Beweis. Unter der Annahme, dass X hyperbolisch ist, ist mit Theorem 4.1.8 der Raum X auch quasi-hyperbolisch. Aus Proposition 4.1.7 folgt dann, dass auch Y quasi-hyperbolisch ist. Erneutes Anwenden von Theorem 4.1.8 impliziert die Hyperbolizität für Y . $\square$

Für den Beweis von Theorem 4.1.8 braucht man im Wesentlichen die Tatsache, dass quasi-Geodätische im Sinne von Theorem 4.1.10 (siehe unten) stabil sind. Dieser Satz sagt, dass (c, d) -quasi-Geodätische immer uniform nah an Geodätischen sind. Die Voraussetzung an X ein δ -hyperbolischer Raum zu sein ist hierfür wesentlich! Beispielsweise ist die logarithmische Spirale ein quasi-geodätischer Strahl in der euklidischen Ebene, der aber offensichtlich nicht endlichen Abstand zu einer Geraden hat.

Wir beweisen zunächst Theorem 4.1.8 unter Verwendung von nachfolgendem Theorem 4.1.10 und ergänzen dann dessen Beweis (beginnend auf Seite 74), der selbst zwei weitere neue Lemmata benötigt.

Beweis von Theorem 4.1.8. Sei zunächst X quasi-hyperbolisch. Weil jedes geodätische Dreieck auch ein quasi-geodätisches Dreieck ist sind alle geodätischen Dreiecke dünn und X somit hyperbolisch.

Sei umgekehrt X ein δ -hyperbolischer Raum für ein gegebenes $\delta \geq 0$. Seien (c, b, δ) wie in Theorem 4.1.10 gegeben. Wir zeigen, dass ein $\delta' \geq 0$ existiert, sodass X ein (c, b, δ') -quasi-hyperbolischer Raum ist.

Sei dazu $\Delta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ ein (a, b) -quasi-geodätisches Dreieck in X . Da X geodätisch ist, existieren Geodätischen γ'_i mit den selben Anfangs- und Endpunkten wie γ_i für alle i . Der Raum X ist hyperbolisch. So folgt, dass das Dreieck $\Delta' = (\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$ δ -dünn ist. Mit Theorem 4.1.10 folgt dann, dass eine Konstante k existiert, sodass

$$\text{im}(\gamma') \subseteq U_k(\text{im}(\gamma)) \text{ und } \text{im}(\gamma) \subseteq U_k(\text{im}(\gamma')) \text{ für alle } i. \quad (4.1.1)$$

Wir kombinieren dieses Wissen mit der δ -Umgebung, die wir aus der δ -hyperbolisch-Eigenschaft von X erhalten. Dann folgt:

$$\text{im}(\gamma'_i) \subseteq U_\delta(\text{im}(\gamma'_j) \cup \text{im}(\gamma'_l)) \text{ wenn } \{i, j, l\} = \{0, 1, 2\} \quad (4.1.2)$$

Die beiden Gleichungen 4.1.1 und 4.1.2 implizieren

$$\begin{aligned} \text{im}(\gamma_i) &\subseteq U_k(\text{im}(\gamma'_i)) \\ &\subseteq U_k(U_\delta(\text{im}(\gamma'_j) \cup \text{im}(\gamma'_l))) \\ &\subseteq U_{2k+\delta}(\text{im}(\gamma_j) \cup \text{im}(\gamma_l)). \end{aligned}$$

Also ist X ein $(c, b, 2k + \delta)$ -quasi-hyperbolischer Raum. □

Theorem 4.1.10 (Stabilität von quasi-Geodätischen). *Seien $c, \delta \geq 0$, $b \geq 1$ Konstanten. Dann existiert ein $k = k(c, b, \delta) \geq 0$, sodass gilt: Ist X ein δ -hyperbolischer Raum, $\gamma : [0, l] \rightarrow X$ eine (c, b) -quasi-Geodätische, $\gamma' : [0, l] \rightarrow X$ eine Geodätische in X mit $\gamma'(0) = \gamma(0)$ und $\gamma(l) = \gamma(l)$, dann gilt:*

$$\text{im}(\gamma') \subseteq U_k(\text{im}(\gamma)) \text{ und } \text{im}(\gamma) \subseteq U_k(\text{im}(\gamma'))$$

Für den Beweis der Stabilität benötigen wir zwei vorbereitende Lemmata, die wir zuerst beweisen.

Lemma 4.1.11 (Tannenbaum-Lemma). Sei (X, d) ein δ -hyperbolischer Raum. Sei $\gamma : [0, l] \rightarrow X$ eine stetige Kurve und $\gamma' : [0, l'] \rightarrow X$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(l) = \gamma'(l')$. Dann gilt für alle $t \in [0, l']$:

$$d(\gamma'(t), \text{im}(\gamma)) \leq \delta |\log_2(L(\gamma))| + 1.$$

Dabei ist $L(\gamma)$ die Länge von γ , das heißt

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \mid k \in \mathbb{N}, t_i \in [0, l], t_0 \leq \dots \leq t_k \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Beweis. Sei ohne Einschränkung die Kurve γ so parametrisiert, dass $l = 1$ und $L(\gamma) > 1$ ist. Falls nötig reskaliere dazu die Metrik bzw. γ . Sei weiter $N \in \mathbb{N}$ die ganze Zahl für die gilt

$$\frac{L(\gamma)}{2^{N+1}} < 1 < \frac{L(\gamma)}{2^N}. \quad (4.1.3)$$

Sei jetzt t ein Punkt in $[0, l']$. Da X ein δ -hyperbolischer Raum ist, können wir Punkte $x_1, \dots, x_N$ finden, sodass $d(\gamma'(t), x_1) \leq \delta$, und für aufeinanderfolgende x_i und x_{i+1} ebenfalls $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta$ gilt. Weiter soll x_N auf einer Geodätischen der Länge kleiner gleich $\frac{L(\gamma)}{2^N}$ liegen, deren Endpunkte auf γ seien. Die Wahl der x_i ist in Abbildung 4.5 nochmal dargestellt.

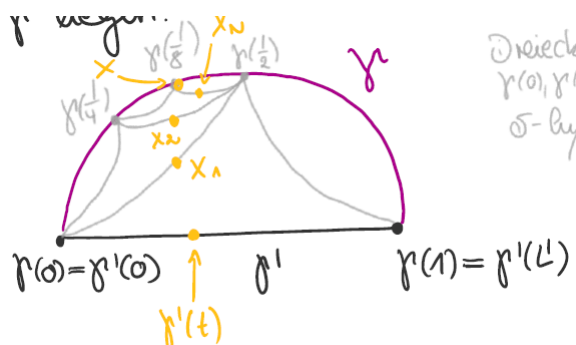


Abbildung 4.5: Wahl der x_i .

Insbesondere existiert dann ein Punkt $x \in \text{im}(\gamma)$ für den mit mehrfacher Anwendung der Dreiecksungleichung gilt:

$$d(\gamma'(t), x) \leq d(\gamma'(t), x_N) + d(x_N, x) \leq \delta \cdot N + \frac{L(\gamma)}{2^{N+1}} \stackrel{(4.1.3)}{\leq} \delta |\log_2(L(\gamma))| + 1.$$

Daraus folgt direkt die Behauptung. □

Lemma 4.1.12 (quasi-Geodätische zählen). Sei (X, d) ein geodätischer metrischer Raum und $\gamma : [0, l] \rightarrow X$ eine (c, b) -quasi-Geodätische für positive, reelle Konstanten c und b . Dann existieren c', b' und eine stetige (c', b') -quasi-Geodätische $\gamma' : [0, l] \rightarrow X$ mit selbem Anfangs- und Endpunkt wie γ so, dass folgende Eigenschaften gelten:

1. Für alle $s, t \in [0, l]$ mit $s \leq t$ ist $L(\gamma'_{|[s, t]}) \leq c' \cdot d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + b'$,
2. $\text{im}(\gamma') \subseteq U_{c+b}(\text{im}(\gamma))$ und
3. $\text{im}(\gamma) \subseteq U_{c+b}(\text{im}(\gamma'))$.

Beweis. Setze $I := [0, l] \cap \mathbb{Z} \cup \{l\}$. Definiere $\gamma'(i) = \gamma$ für alle $i \in I$. Erweitere γ' zu einer stetigen Funktion auf I durch Einsetzen geodätischer Stücke zwischen den Stützpunkten in I (siehe Abbildung 4.6). Man kann dann nachrechnen, dass die Behauptung im Lemma erfüllt sind. $\square$



Abbildung 4.6: Erweiterung von γ' .

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel zusammen um Theorem 4.1.10 zu beweisen.

Beweis von Theorem 4.1.10. Wegen Lemma 4.1.12 können wir annehmen, dass γ stetig ist. Wenn nötig ersetze dafür c und b durch größere Konstanten. Mit 1. aus Lemma 4.1.12 folgt dann für alle $r \leq s$ in $[0, l]$, dass

$$L(\gamma_{[r, s]}) \leq c \cdot d(\gamma(r), \gamma(s)) + b. \quad (4.1.4)$$

Im *ersten Schritt* zeigen wir, dass eine Geodätische γ' nah an der quasi-Geodätischen γ ist. Setze dazu $\Delta := \sup\{d(\gamma'(t'), \text{im}(\gamma)) \mid t' \in [0, l']\}$. Es gilt $\text{im}(\gamma') \subseteq U_\Delta(\text{im}(\gamma))$. Da γ stetig ist, wird das Supremum in einem Punkt in $[0, l']$ angenommen. Das heißt es existiert $t' \in [0, l']$ mit $\Delta = d(\gamma'(t'), \text{im}(\gamma))$. Siehe dazu auch Abbildung 4.7.

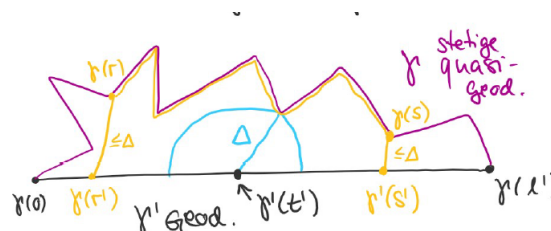


Abbildung 4.7: Der Abstand Δ wird in einem Punkt in $[0, l']$ tatsächlich angenommen.

Für die Abschätzung von Δ definiere $r' := \max\{0, t' - 2\Delta\}$ und $s' := \min\{l', t' + 2\Delta\}$. Es existieren dann Konstanten r und s in $[0, l']$ mit

$$d(\gamma(r), \gamma'(r')) \leq \Delta \text{ und } d(\gamma(s), \gamma'(s')) \leq \Delta.$$

Betrachte eine Kurve γ'' , die wie folgt definiert ist: Die Kuve startet in $\gamma'(r')$, verläuft von dort längs einer Geodätischen nach $\gamma(r)$, folgt dann der Kurve γ bis $\gamma(s)$ um von dort längs einer Geodätischen nach $\gamma'(s')$ zu verlaufen. Vergleiche Abbildung 4.7. Das Lemma 4.1.11 liefert dann

$$\Delta \leq d(\gamma'(t'), \text{im}(\gamma'')) \leq \delta |\log_2 L(\gamma'')| + 1.$$

Mit Ungleichung (4.1.4), angewandt im zweiten Schritt, folgt dann

$$\begin{aligned} L(\gamma'') &\leq 2\Delta + L(\gamma|_{[r,s]}) \\ &\leq c \cdot d(\gamma(r), \gamma(s)) + b + 2\Delta \\ &\leq c \cdot (d(\gamma(r), \gamma'(t')) + d(\gamma'(t'), \gamma(s))) + b + 2\Delta \\ &\leq c \cdot (\Delta + 2\Delta + 2\Delta + \Delta) + b + 2\Delta \\ &= (6c + 2) \cdot \Delta + b. \end{aligned}$$

Nutze dabei, dass $d(\gamma(r), \gamma'(t'))$ und $d(\gamma'(t'), \gamma(s))$ durch Δ nach oben beschränkt sind. Daraus folgt

$$\Delta \leq \delta \cdot |\log_2 L(\gamma'')| + 1 \leq \log_2((6c + 2) \cdot \Delta + b) + 1.$$

Es existiert also eine obere Schranke für Δ , die nur von δ, c und b abhängt.

Wir müssen umgekehrt noch zeigen, dass die quasi-Geodätische γ nah an γ' ist. Das heißt, dass wir $\sup\{d(\gamma(t), \text{im}(\gamma')) \mid t \in [0, l]\}$ abschätzen müssen. Wie oben definieren wir $\Delta := \sup\{d(\gamma(t), \text{im}(\gamma')) \mid t' \in [0, l']\}$.

Die Idee ist, zu zeigen, dass von γ nur kleine Stücke außerhalb $U_\Delta(\text{im}(\gamma'))$ liegen. Betrachte dazu Abbildung 4.8.

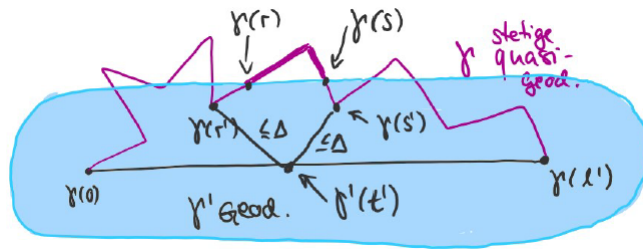


Abbildung 4.8: Nur kleine Stücke liegen außerhalb $U_\Delta(\text{im}(\gamma'))$.

Seien $r, s \in [0, l]$ so gewählt, dass $[r, s]$ ein inklusionsmaximales Intervall ist für das $\gamma|_{[r,s]}$ außerhalb $U_\Delta(\text{im}(\gamma'))$ liegt. Falls es keine solchen Werte $r \neq s$ gibt, ist nichts zu zeigen.

Da γ stetig ist, gibt es dann $t' \in [0, l']$ und $r' \in [0, r]$, sowie $s' \in [s, l]$ mit der Eigenschaft

$$d(\gamma'(t'), \gamma(r')) \leq \Delta \quad \text{und} \quad d(\gamma'(t'), \gamma(s')) \leq \Delta$$

Kombiniere mit der Dreiecksungleichung und erhalte

$$L(\gamma|_{[r,s]}) \leq L(\gamma|_{[r',s']}) \leq c \cdot d(\gamma(r'), \gamma(s')) + b \leq 2\Delta + b.$$

Daraus folgt $\gamma([r, s]) \subseteq U_{c\Delta + \frac{b}{2} + \Delta}(\text{im}(\gamma'))$. Dieses Argument können wir auf alle Stücke von γ außerhalb der Δ -Umgebung von $\text{im}(\gamma')$ anwenden um zu sehen, dass das Bild $\text{im}(\gamma)$ in der Menge $U_{c\Delta + \frac{b}{2} + \Delta}(\text{im}(\gamma'))$ enthalten ist. Setze jetzt $k := c\Delta + \frac{b}{2} + \Delta$ und erhalte die Behauptung zusammen mit dem ersten Schritt des Beweises. $\square$

4.2 Hyperbolische Gruppen und das Wortproblem

Bereits im Kontext von Theorem 3.3.9 haben wir gesehen, dass Gruppen, die geeignet gut auf einem metrischen Raum wirken in gewissem Sinne Eigenschaften dieses Raumes erben. Die Geometrie des Raumes hat zum Teil einen großen Einfluss auf algebraische Eigenschaften der Gruppen. In diesem Kapitel werden wir ein sehr konkretes solches Beispiel für hyperbolische Gruppen sehen: die Lösbarkeit des Wortproblems.

4.2.1 Hyperbolische Gruppen

Definieren wir zunächst einmal was hyperbolische Gruppen sind und schauen uns erste Beispiele solcher Gruppen an.

Definition 4.2.1 (Hyperbolische Gruppen). Eine endlich erzeugte Gruppe G heißt (Gromov) *hyperbolisch*, falls für ein (und damit jedes) endliche Erzeugendensystem S von G der Cayleygraph $(\text{Cay}(G, S), d_S)$ ein hyperbolischer metrischer Raum ist.

Beispiel 4.2.2. Erste Beispiele für hyperbolische Gruppen.

1. Endliche Gruppen sind alle hyperbolisch, weil ihre Cayleygraphen beschränkte metrische Räume sind.
2. Die Gruppe $(\mathbb{Z}^k, +)$ ist nur für $k = 1$ hyperbolisch. Die Cayleygraphen von $\mathbb{Z}^k$ sind jeweils quasi-isometrisch zu $\mathbb{R}^k$ was nur für $k = 1$ ein hyperbolischer metrischer Raum ist.
3. Freie Gruppen sind hyperbolisch, da Bäume ebenfalls hyperbolische metrische Räume sind mit 0-dünnen Dreiecken.
4. Kokompakte, diskrete Untergruppen von $\text{PSL}_2 \mathbb{R}$ sind hyperbolisch, weil diese quasi-isometrisch zur hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ sind. Ein Beispiel für eine solche Gruppe ist $\text{PSL}_2 \mathbb{Z}$. Dazu gleich mehr.

Aus der quasi-Isometrie Invarianz von Hyperbolizität folgt direkt der nächste Satz.

Theorem 4.2.3 (Hyperbolizität von Gruppen QI-invariant). *Seien G und H endlich erzeugte, quasi-isometrische Gruppen. Die Gruppe G ist genau dann hyperbolisch, wenn H hyperbolisch ist.*

Wir schauen uns als nächstes etwas genauer eine Gruppe an, die auf der hyperbolischen Ebene wirkt. Zunächst aber ein paar Infos über deren Geometrie.

Definition 4.2.4. Die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$ Im oberen Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene ist $\mathbb{H}^2$ als Menge gegeben durch

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im}(z) > 0\}.$$

Abstände zwischen Punkten $p, q \in \mathbb{H}^2$ sind gegeben durch

$$d(p, q) = \log\left(\frac{|p - \bar{q}| + |p - q|}{|p - \bar{q}| - |p - q|}\right).$$

Ein paar wesentliche Eigenschaften sind, ohne Beweis, in der nächsten Proposition gelistet.

Proposition 4.2.5. *Betrachte $\mathbb{H}^2$ im oberen Halbebenenmodell. Dieser metrische Raum kann auch als differenzierbare Mannigfaltigkeit odelliert werden. Dann gilt:*

1. *Die Riemannsche Struktur ist gegeben durch $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.*
2. *Die hyperbolische Norm für Tangentialvektoren $v \in T_z\mathbb{H}^2$ erfüllt*

$$\|v\|^{hyp} := \frac{\|v\|^{eukl}}{\operatorname{im} z}.$$

3. *Die Länge einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ geschrieben als $\gamma(t) = x(t) + i \cdot y(t)$ wird berechnet durch*

$$L_{hyp}(\gamma) := \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|^{eukl}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2} dt.$$

Automorphismen der hyperbolischen Ebene lassen sich mit Hilfe von Möbiustransformationen beschreiben, die wie folgt definiert sind.

Definition 4.2.6. Möbiustransformationen Eine *Möbiustransformation*, kurz MT, ist eine Abbildung von $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$, die durch vier Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ wie folgt beschrieben wird:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \infty \mapsto \frac{a}{c}, \quad \text{und} \quad -\frac{d}{c} \mapsto \infty.$$

Proposition 4.2.7. Betrachte wie oben das obere Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene. Dann gilt:

1. MT sind 3-fach transitiv. Das heißt für alle z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existiert genau eine MT T mit $T(z_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.
2. MT bilden die Menge aller Kreise Kreise und Geraden auf sich selbst ab.
3. Die Gruppe $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) := \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \pm \mathbb{1}$ wirkt durch Möbiustransformationen auf $\mathbb{H}^2$. Setze dazu

$$g := \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \right) \mapsto g.z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

Ist $\text{im}(z) > 0$, so ist auch $\text{im}(g.z) = \frac{\text{im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$.

4. Die Wirkung von $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}^2$ ist isometrisch und die Abbildung $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \text{Iso}(\mathbb{H}^2)$ ist injektiv.
5. Die Bilder von Geodätischen in $\mathbb{H}^2$ sind Senkrechte auf die reelle Achse und Halbkreise in der oberen Halbebene, deren Mittelpunkte auf der reellen Achse liegen.
6. Die Gruppe $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ mit ganzzahligen Einträgen a, b, c, d wirkt eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}^2$ mit Fundamentalbereich wie in Abbildung 4.9 skizziert.

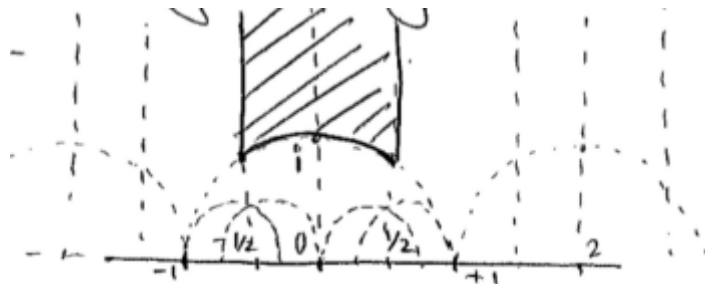


Abbildung 4.9: Fundamentalbereich der Wirkung von $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}^2$

Beispiel 4.2.8 (Nicht-Beispiele zu hyperbolischen Gruppen). Wir hatten gesehen, dass $\mathbb{Z}^2$ und $\mathbb{R}^2$ quasi-isometrisch und nicht hyperbolisch sind. Man zeigt dies, indem man nachrechnet, dass Dreiecke immer größer skaliert werden können. Diese Idee kann allgemeiner für Untergruppen $H \subseteq G$ gefasst werden:

Sei G eine von S_G erzeugte Gruppe. Erzeugt $S_H \subseteq S_G$ eine Untergruppe H in G , so gilt $d_H(1, h) \geq d_G(1, h)$ für alle $h \in H$. Hierbei sind d_H und d_G die entsprechenden Wortmetriken bezüglich S_H und S_G .

Wenn zusätzlich gilt, dass auch $\frac{d_H(1, h)}{d_G(1, h)} \leq c$ für eine von H unabhängige Konstante c , dann sagen wir H ist in G *undistorted*.

Ist H in G undistorted und $H \cong \mathbb{Z}^2$, dann ist G nicht hyperbolisch.

Überraschenderweise gilt auch viel allgemeiner folgendes:

Theorem 4.2.9 (Satz über die verbotene Untergruppe). *Sei G endlich erzeugt mit einer Untergruppe $H \cong \mathbb{Z}^2$, so ist G nicht hyperbolisch.*

Beweis-Skizze. Zeige zunächst, dass ein Element unendlicher Ordnung eine Quasi-Achse besitzt, das heißt eine quasi-Geodätische γ existiert, sodass $g^n \cdot \gamma = \gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige dann: Falls mehrere quasi-Achsen existieren, so sind sie paarweise nah beieinander.

Sei h von unendlicher Ordnung und $\langle g, h \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Insbesondere kommutieren g und h in diesem Fall und es folgt, dass h die quasi-Achsen von g permutiert.

Zeige abschließend, dass der Zentralisator von g virtuell $\mathbb{Z}$ ist.

Aber gleichzeitig gilt: $\langle g \rangle$ hat in $\mathbb{Z}^2 \cong \langle g, h \rangle$ unendlichen Index und $\langle g \rangle \subseteq C(g)$ kann nur endlichen Index haben. Das ist ein Widerspruch. $\square$

Moussong zeigte für Coxetergruppen G , dass diese hyperbolisch sind, wenn G keine Untergruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ besitzt. Ebenso gilt für die Fundamentalgruppe $\pi_1(M^3)$ einer 3-dimensionalen nicht-positiv gekrümmte Mannigfaltigkeit, dass die Existenz einer Untergruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ die einzige Obstruktion für Hyperbolizität ist.

Im Allgemeinen ist es unbekannt, ob dies immer der Fall ist, d.h. ob eine nicht-hyperbolische Gruppe immer eine Untergruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ besitzt.

4.2.2 Das Wortproblem

Das Wortproblem ist eines der drei großen Gruppentheoretischen Probleme, die auf Max Dehn (*1878 - †1952) und seine einschlägigen Arbeiten zu Beginn des 20. Jahrhunderts zurückgehen.

Definition 4.2.10 (Das Wortproblem). Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ eine endlich präsentierte Gruppe. Wir sagen G hat *lösbares Wortproblem*, wenn es einen Algorithmus gibt der in endlicher Zeit für jedes Wort w über dem Alphabet $S^\pm$ entscheidet, ob w in G das neutrale Element repräsentiert.

Bemerkung 4.2.11. Genauer bedeutet ein lösbares Wortproblem, dass die Mengen $\{w \in (S \cup S^{-1})^* \mid w \text{ repräsentiert } 1 \in G\}$ und $\{w \in (S \cup S^{-1})^* \mid w \text{ repräsentiert nicht } 1 \in G\}$ rekursiv aufzählbar sind. Vergleiche dazu auch Resultate im Kontext der Berechenbarkeits- und Entscheidungstheorie im Kontext von Turing-Maschinen in der theoretischen Informatik.

Bemerkung 4.2.12. Man kann zeigen, dass das Wortproblem nicht mit einem einzigen Algorithmus für alle endlich präsentierten Gruppen gelöst werden kann. Es gibt aber Klassen von Gruppen, die lösbares WP haben. Darunter zählen beispielsweise (trivialerweise) endliche Gruppen, freie Gruppen, Coxeter Gruppen, Zopfgruppen, Fundamentalgruppen von geschlossenen orientierbaren Flächen (Dehn 1911).

Der nächste Satz folgt direkt aus nachstehenden Sätzen 4.2.16 und 4.2.17.

Theorem 4.2.13 (Lösbares Wortproblem: Hyperbolische Gruppen). *Hyperbolische Gruppen haben ein lösbares Wortproblem. Genauer: Ist G endlich von S erzeugt und hyperbolisch, so existiert eine endliche Teilmenge $R \subseteq (S \cup S^{-1})^*$, sodass $G \cong \langle S \mid R \rangle$ und das Wortproblem für $\langle S \mid R \rangle$ lösbar ist.*

Nachfolgendes Hilfsmittel werden wir für den Beweis verwenden.

Definition 4.2.14. Dehn-Präsentierungen Eine endliche Präsentation $\langle S \mid R \rangle$ heißt *Dehn-Präsentierung*, wenn ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und Wörter u_i, v_i , $i = 1, \dots, n$, existieren mit der Eigenschaft, dass

1. $R = \{u_1 v_1^{-1}, \dots, u_n v_n^{-1}\}$
2. für alle j ist v_j echt kürzer als u_j
3. Für alle $w \in (S \cup S^{-1})^* \setminus \{\epsilon\}$, die das neutrale Element in $\langle S \mid R \rangle$ repräsentieren, ist mindestens eines der u_j , $j \in \{1, \dots, n\}$, ein Teilwort von w .

Beachte, dass die Wahl des leeren Wortes $v_j = \epsilon$ erlaubt ist in obiger Definition.

Beispiel 4.2.15. Erste Beispiele für Dehn-Präsentierungen:

1. $\langle x, y \mid xx^{-1}\epsilon, x^{-1}x\epsilon, yy^{-1}\epsilon, y^{-1}y\epsilon \rangle$ ist eine Dehn-Präsentierung der freien Gruppe F_2 auf den Erzeugern x und y . Um das einzusehen wähle $v_i = \epsilon$ für alle i , sowie $u_1 = xx^{-1}$, $u_2 = x^{-1}x$, $u_3 = yy^{-1}$ und $u_4 = y^{-1}y$.
2. $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ ist endliche Präsentation von $\mathbb{Z}^2$ aber keine Dehn-Präsentierung. Was erst einmal nicht bedeutet, dass diese Gruppe keine haben kann.

Theorem 4.2.16 (Wortproblem für Gruppen mit Dehn-Präsentierung). *Für jede durch eine Dehn-Präsentierung gegebene Gruppe ist das Wortproblem lösbar.*

Beweis. Wir geben einen Algorithmus an: Sei $R = \{u_1v_1, \dots, u_nv_n\}$ wie in Definition 4.2.14. Sei weiter $w \in (S \cup S^{-1})^*$ ein beliebiges Wort. Falls $w = \epsilon$, dann präsentiert w das triviale Wort. Wir nehmen $w \neq \epsilon$. Dann betrachte:

- a) Ist keines der u_i als Teilwort in w enthalten, dann ist w nicht das triviale Wort in $\langle S \mid R \rangle$, wegen (3) in Definition 4.2.14.
- b) Existiert j , sodass u_j ein Teilwort von w ist, dann schreibe $w = w'u_jw''$ für geeignete Wörter $w', w'' \in (S \cup S^{-1})^*$. Nach Definition 4.2.14 ist $u_jv_j^{-1} \in R$. Also ist $u_j = v_j$ und $w = w'v_jw''$ in $\langle S \mid R \rangle$. Genauer betrachte die Projektion $\pi : F(S) \rightarrow \langle S \mid R \rangle = F(S) / \langle R \rangle_{F(S)}^\triangleleft$. Es ist

$$\begin{aligned} \pi(w) &= \pi(w')\pi(u_j)\pi(w'') \\ &= \pi(w') \underbrace{\pi(u_jv_j^{-1})}_{=1} \pi(v_j)\pi(w'') \\ &= \pi(w')\pi(v_j)\pi(w'') = \pi(w'v_jw''). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass w das Neutralelement 1 genau dann präsentiert, wenn das kürzere Wort $w'v_jw''$ das Element 1 präsentiert.

Wende dieses Verfahren nun (rekursiv) auf $w'v_jw''$ an. Dieses Vorgehen terminiert nach endlich vielen Schritten, da die Länge immer echt verkleinert wird. Das Wortproblem ist also lösbar. $\square$

Mit Theorem 4.2.16 müssen wir nur noch zu zeigen, dass hyperbolische Gruppen eine Dehn-Präsentierung haben um einzusehen, dass das Wortproblem für hyperbolische Gruppen lösbar ist.

Theorem 4.2.17 (Hyperbolische Gruppen haben Dehn-Präsentierung). *Sei G eine hyperbolische Gruppe. Für alle endlichen Erzeugendensysteme S von G existiert eine endliche Menge $R \subseteq (S \cup S^{-1})^*$, sodass $\langle S \mid R \rangle$ eine Dehn-Präsentierung von G ist. Insbesondere sind hyperbolische Gruppen endlich präsentiert.*

Vorbereitend für den Beweis von Theorem 4.2.17 betrachten wir zwei Lemmata.

Lemma 4.2.18 („Trapping“ für lokale Geodätischen). *Sei $\delta \geq 0$, $c > 8\delta$ und (X, d) ein δ -hyperbolischer Raum. Sei $\gamma : [0, l] \rightarrow X$ eine c -lokale Geodätische, das heißt, dass für alle $t, t' \in [0, l]$ mit $|t - t'| < c$ gilt $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$. Sei weiter $\gamma' : [0, l'] \rightarrow X$ eine Geodätische mit $\gamma'(0) = \gamma(0)$ und $\gamma'(l) = \gamma(l)$, so gilt $\text{im}(\gamma) \subseteq U_{2\delta}(\text{im}(\gamma'))$.*

Vergleiche ?? für einen Beweis dieser Aussage.

Wir verwenden Lemma 4.2.18 um folgende Aussage zu zeigen.

Lemma 4.2.19 (Abkürzungen). Sei G eine durch S endlich erzeugte Gruppe mit δ -hyperbolischem Cayleygraphen $\text{Cay}(G, S)$ für ein geeignetes $\delta > 0$. Sei $\gamma : [0, n] \rightarrow \text{Cay}(G, S)$ ein stückweise linearer, nach Bogenlänge parametrisierter, geschlossener Weg. Dann existieren $t, t' \in [0, n]$ mit $l(\gamma|_{[t, t']}) \leq 8 \cdot \delta$ und $\gamma|_{[t, t']}$ ist nicht geodätisch. D.h. zwischen $\gamma(t)$ und $\gamma(t')$ gibt es eine Abkürzung.

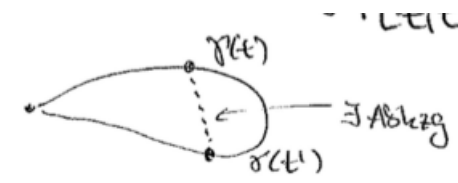


Abbildung 4.10: Der Weg $\gamma|_{[t, t']}$ ist nicht geodätisch.

Beweis. Ohne Einschränkungen nehmen wir an, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Das bedeutet, dass $|\frac{d}{dt}\gamma(t)| = 1$ für alle t . Wir zeigen, dass γ für ein $c > 8\delta$ keine c -lokale Geodätische sein kann. Angenommen es existiert $c > 8\delta$, sodass γ eine c -lokale Geodätische in $\text{Cay}(G, S)$ ist. Da $\gamma(0) = \gamma(n)$ ist, muss $n > 8\delta$ sein. Sonst ist γ eine Geodätische von $\gamma(0)$ nach $\gamma(n) = \gamma(0)$. Nach Lemma 4.2.18 ist γ bereits 2δ -nahe an jeder Geodätischen, die in $\gamma(0)$ beginnt und in $\gamma(n) = \gamma(0)$ endet. Die konstante Abbildung ist eine solche Geodätische. So haben wir $\text{im}(\gamma) \subseteq U_{2\delta}(\gamma(0)) = B_{2\delta}(\gamma(0))$. Es folgt

$$4\delta \geq \text{diam}(B_{2\delta}(\gamma(0))) \geq d_S(\gamma(0), \gamma(5\delta)) = 5\delta$$

Die zweite Ungleichung ergibt sich, weil γ geschlossen ist. Die erste Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass γ eine c -lokale Geodätische mit $c > 8\delta$ ist. Also kann für $c > 8\delta$ die Kurve γ keine c -lokale Geodätische sein. Deshalb existieren $t, t' \in [0, n]$ mit der Eigenschaft, dass $|t - t'| \leq 8\delta$ und $d_S(\gamma(t), \gamma(t')) \neq |t - t'|$. Insbesondere ist $\gamma|_{[t, t']}$ keine Geodätische und $l(\gamma|_{[t, t']}) = |t - t'| \leq 8\delta$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel zusammen um Theorem 4.2.17 zu beweisen.

Beweis von Theorem 4.2.17. Sei $\pi : F(S) \rightarrow G$ die natürliche Projektion. Setze $D := \lceil 8 \cdot \delta \rceil + 2$ und sei δ die Hyperbolizitätskonstante von G . Inspiriert vom Abkürzungslemma 4.2.19 definieren wir

$$R := \{ss^{-1}\epsilon \mid s \in (S \cup S^{-1})\} \cup \{uv^{-1} \mid u, v \in (S \cup S^{-1})^* \text{ mit } \pi(u) = \pi(v) \text{ und } |v| = d_S(1, \pi(u)) < |u| \leq D\}.$$

Betrachte den Homomorphismus $\varphi : \langle S \mid R \rangle \rightarrow G$ induziert durch $\varphi|_S := \text{id}|_S$. Da $\langle S \rangle = G$ ist, ist φ surjektiv. Wir zeigen nun, dass φ injektiv und $\langle S \mid R \rangle$ eine Dehn-Präsentierung für G ist. Die Injektivität ist äquivalent zu $\ker(\pi) = \langle R \rangle_{F(S)}^A$. Die Definition von R beinhaltet, dass $\pi(v) = \pi(u)$ ist. Also ist $\langle R \rangle_{F(S)}^A \subseteq \ker(\pi)$. Es bleibt daher noch zu zeigen, dass die umgekehrte Inklusion gilt.

Sei dazu $w \in (S \cup S^{-1})^*$ ein Wort mit $\pi(w) = 1$. Wir zeigen mit Induktion über $l(w)$, dass $w \in \langle R \rangle_{F(S)}^\triangleleft$ ist und w ein Teilwort wie in Definition 4.2.14 besitzt. Für $l(w) = 0$ haben wir $w = \epsilon$, das leere Wort. Sei also $l(w) > 0$ und gelte die Behauptung für alle Wörter, die kürzer sind als w .

Betrachte zunächst den Fall, dass das Wort w ein Teilwort st enthält mit $s, t \in S \cup S^{-1}$ und $\pi(st) = 1$. Dann ist $st \in R$ und $st = u, v = \epsilon$ ist das gesuchte Paar für die Dehn-Präsentierung. Lösche st aus w und erhalte mit Induktion, dass $w' \in \langle R \rangle_{F(S)}^\triangleleft$. Multiplizieren wir w mit einem geeigneten Konjugat von st , so erhält man $w \in \langle R \rangle_{F(S)}^\triangleleft$.

Falls das Wort w kein Teilwort wie im ersten Fall enthält definiert w einen abgeschlossenen Pfad in $\text{Cay}(S, G)$, weil $\pi(w) = 1$ ist. Mit Abkürzungslemma 4.2.19 existieren dann Teilwörter w_1, u, w_2 von w , sodass $w = w_1 u w_2$ und $d_S(1, \pi(u)) < |u| \leq D$ gilt. Dann ist u, v das gesuchte Paar für die Dehn-Präsentierung. Nach Definition von R gilt dann

$$1 = \pi(w) = \pi(w_1)\pi(u)\pi(w_2) = \pi(w_1)\pi(v)\pi(w_2) = \pi(w_1 v w_2).$$

Das Wort $w_1 v w_2$ ist echt kürzer als w und somit ist $w_1 v w_2 \in \langle R \rangle_{F(S)}^\triangleleft$. Weiter gilt

$$w = w_1 \cdot uv^{-1} \cdot w_1^{-1} \cdot w_1 u w_2$$

wobei $uv^{-1} \in R$ und $w_1 u w_2$ in $\langle R \rangle_{F(S)}^\triangleleft$ enthalten ist. Somit folgt $w \in \langle R \rangle_{F(S)}^\triangleleft$ und $\ker(\pi) = \langle R \rangle_{F(S)}^\triangleleft$. Mit dem Isomorphiesatz erhalten wir

$$G \cong F(S) / \ker(\pi) = F(S) / \langle R \rangle_{F(S)}^\triangleleft = \langle S \mid R \rangle,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Es gilt eigentlich die stärkere Aussage, dass eine Gruppe genau dann eine Dehn-Präsentierung besitzt, wenn sie hyperbolisch ist. Die dazu nötige Umkehrung von Theorem 4.2.17 werden wir nicht beweisen.

4.2.3 Das Konjugationsproblem

Eng verwandt mit dem Wortproblem und ebenfalls eines der klassischen Dehn'schen Probleme der Gruppentheorie ist folgende Frage:

Definition 4.2.20 (Das Konjugationsproblem). Das *Konjugationsproblem* ist die Frage, ob sich mittels eines endlichen Algorithmus entscheiden lässt, ob zwei Elemente u, v in einer gegebenen Gruppe G konjugiert sind.

Beispiel 4.2.21. Freie Gruppen haben lösbares Konjugationsproblem. Dafür nutzt man sogenannte zyklische Reduktionen von Wörtern.

Wir nennen ein Wort $w = s_0 \cdots s_n$ in $F(S)$ *zyklisch reduziert*, wenn $s_i^{-1} \neq s_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und $s_0^{-1} \neq s_n$.

Ein beliebiges Wort kann durch Anwendung folgender Schritte zyklisch reduziert werden:

- Lösche Teilwörter der Form $s^{-1}s$, $s \in S \cup S^{-1}$.
- Lösche s_0 und s_n , falls $s_0^{-1} = s_n$.
- Wiederhole die ersten beiden Schritte bis keine Löschung mehr möglich ist.

Es gibt eine (bis auf zyklische Permutationen) eindeutige zyklisch reduzierte Form von w , die in endlicher Zeit erreicht wird. Es kann zum Beispiel $bab^{-1}babb^{-1}$ zu baa oder aab zyklisch reduziert werden, die aber durch zyklische Permutationen aufeinander zurückzuführen sind.

Man sieht leicht ein, dass ein Reduktionsschritt der zyklischen Reduktion entweder dem offensichtlichen Löschen eines trivialen Teilwortes entspricht, oder aber der Konjugation mit einem Erzeuger.

Daher sind zwei Elemente in einer freien Gruppe genau dann konjugiert, wenn sie bis auf zyklische Permutation die selbe zyklisch reduzierte Form haben.

Wir zeigen jetzt, dass hyperbolische Gruppen ebenfalls lösbares Konjugationsproblem haben. Die nächste Proposition ist eine Ergänzung zum Lemma 4.2.18.

Proposition 4.2.22. *Sei (X, d) ein δ -hyperbolischer Raum und $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine c -lokale Geodätische mit $c < 8\delta$. Dann gilt:*

1. *Die Kurve γ ist eine (λ, ϵ) -quasi-Geodätische, wobei $\lambda = (c + 4\delta)/(c - 4\delta)$ und $\epsilon = 2\delta$.*
2. *Jede Geodätische $\gamma' : [0, l] \rightarrow X$ mit den selben Enden wie γ , d.h. mit $\gamma'(0) = \gamma(a)$ und $\gamma'(l) = \gamma(b)$, erfüllt*

$$\text{im}(\gamma') \subseteq U_{3\delta}(\text{im}(\gamma)).$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Nachweis der zweiten Eigenschaft. Sei dazu p ein Punkt auf $\text{im}(\gamma')$. Aufgrund von Lemma 4.2.18 ist jeder Punkt von $\text{im}(\gamma)$ entweder in der 2δ -Umgebung vom geodätischen Segment $[\gamma'(0), p]$ oder von $[p, \gamma'(l)]$. Siehe auch Abbildung 4.11.

Da γ stetig und $\text{im}(\gamma)$ zusammenhängend ist, existiert ein Punkt x im Bild $\text{im}(\gamma)$ mit der Eigenschaft, dass x enthalten ist in $U_{2\delta}([\gamma(a), p]) \cap U_{2\delta}([p, \gamma(b)])$. Seien Punkte $q \in [\gamma(a), p]$ und $r \in [p, \gamma(b)]$ gegeben mit $d(x, q) \leq 2\delta$ und $d(x, r) \leq 2\delta$. Nach Konstruktion liegt p auf einer Geodätischen von q nach r wie auch in Abbildung 4.12 skizziert.

Dann ist aber $p \in U_\delta([q, x] \cup [r, x])$, weil der Raum X ein δ -hyperbolischer Raum ist. Es gilt außerdem

$$d(p, \text{im}(\gamma)) \leq d(p, [q, x] \cup [r, x]) + \max\{d(q, x), d(r, x)\} \leq \delta + 2\delta = 3\delta.$$



Für das erste Item ist zu zeigen, dass γ eine quasi-Geodätische ist. Da γ eine c -lokale Geodätische ist, folgt bereits

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq |t - t'| \text{ für alle } t, t' \in [a, b].$$

A diagram of a parabolic arch with three vertical hangers. The top points are labeled x' , m' , and y' . The bottom points are labeled x , m , and y . The vertical distances from the top to the bottom are each labeled 25.

Abbildung 4.13: Die Punkte m und m'

Wir beweisen die Zwischenbehauptung: m' liegt zwischen x und y liegt.

Sei x_0 ein Punkt auf γ in Richtung m von x mit Abstand $d(x, x_0) = 2\delta$. Sei weiter y_0 ein Punkt auf γ in Richtung m von y mit Abstand $d(y, y_0) = 2\delta$. Dann ist jedes geodätische Dreieck auf x, x_0, x' aufgrund von δ -Hyperbolizität und Lemma 4.2.18 in der 3δ -Umgebung enthalten.

Nach Wahl von x_0 , und weil $d(x, m) = c' > 6\delta$ ist, gilt somit $d(x_0, m) > 3\delta$. Damit liegt jedes geodätische Dreieck auf den Punkten x, x', x_0 außerhalb von $U_{3\delta}(m)$. Vergleiche dazu Abbildung 4.14.



Abbildung 4.14: Abstand zwischen x, x' und x_0 .

Der zu m nächste Punkt des Dreiecks ist x_0 , da γ eine c -lokale Geodätische ist. Analog folgt, dass jedes geodätische Dreieck mit Ecken y, y', y_0 komplett außerhalb von $U_{3\delta}(m)$ liegt.

Betrachte jetzt das geodätische 4-Eck mit Ecken x', y', x_0, y_0 . Doppeltes Anwenden der δ -Hyperbolizität von X liefert, dass der Punkt m in $U_{2\delta}([x_0, x'] \cup [x', y'] \cup [y', y_0])$ enthalten ist. Die Einzelnen Intervalle sind hier Bilder der verbindenden Geodätischen. Es sind aber $[x_0, x']$ und $[y_0, y']$ Seiten der beiden Dreiecke auf x_0, x, x' und y_0, y, y' und haben einen Mindestabstand von 3δ zu m . So folgt, dass ein weiterer Punkt $m'' \in [x', y']$ existiert mit der Eigenschaft, dass $d(m, m'') \leq 2\delta$.

Ist $m'' = m'$, so liegt m' zwischen x' und y' . Wir nehmen daher an, dass $m'' \neq m'$ gilt. Betrachte das geodätische Dreieck auf m, m', m'' . Es gilt $d(m, m'') \leq 2\delta$, sowie $d(m, m') \leq 2\delta$ und das Dreieck $\Delta(m, m', m'')$ ist δ -dünn. Also ist der Abstand von jedem Punkt auf der Geodätischen zwischen m' und m'' zu m höchstens 3δ . Insbesondere kann damit weder x' noch y' zwischen m' und m'' liegen aus Abstandsgründen. Es folgt $m' \in [x', y']$, was die Zwischenbehauptung zeigt.

Basierend auf der so eben bewiesenen Zwischenbehauptung drücken wir jetzt γ als Verknüpfung von $M \leq \frac{(b-a)}{c'}$ Geodätischen der Länge c' und einem kleinen Stück der Länge η am Ende aus. Betrachte dazu Abbildung 4.15.

Die zu den x_i nächsten Punkte x'_i auf γ' bilden eine Folge mit Indizes in der selben Reihenfolge nach der Zwischenbehauptung. Seien $p' = x'_i, p = x_i$ und $q' = x'_{i+1}, q = x_{i+1}$ zwei aufeinanderfolgende solche Punkte. Wir schätzen den Mindestabstand von p und q ab.

Mit Lemma 4.2.18 folgt, dass $d(p, p') \leq 2\delta$ und $d(q, q') \leq 2\delta$. Weiter ist nach Konstruktion $d(p, q) = c' > 6\delta$. Der Punkt p' ist der Punkt auf der Geodätischen γ , der p am

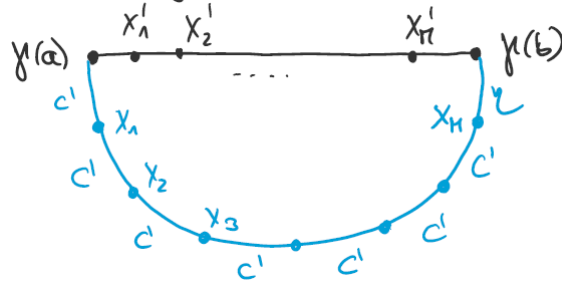


Abbildung 4.15: Die Geodätische γ geschrieben als Verknüpfung von vielen Segmenten der Länge c' und einem Endstück η .

nächsten ist. Mit wiederholtem Anwenden der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt:

$$\begin{aligned} d(p', q') &\geq |d(p', p) - d(p, q')| = d(p, q') - d(p', p) \\ &\geq |d(p, q) - d(q, q')| - d(p, p') \geq |c' - 2\delta| - 2\delta \\ &= c' - 4\delta \end{aligned}$$

Mit Dreiecksungleichung erhalten wir außerdem

$$d(x'_M, \gamma(b)) \geq |d(x'_M, x_M) - d(x_M, \gamma(b))| \geq |2\delta - \eta|.$$

Aus der Tatsache, dass x'_M am nächsten an x_M liegt von den Punkten auf γ' , folgt

$$d(x'_M, \gamma(b)) \geq \eta - 2\delta.$$

Nach Wahl von M und η folgt daher $b - a = Mc' + \eta$ und nach Verkettung der Pfade:

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) \geq M(c' - 4\delta) + \eta - 2\delta = (b - a) - 4\delta M - 2\delta.$$

Da aber gilt $M \leq \frac{(b-a)}{c'}$, folgt

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) \geq (b - a) - \frac{4\delta(b - a)}{c'} - 2\delta = \frac{c' - 4\delta}{c'}(b - a) - 2\delta.$$

Nach Definition von $c' = \frac{c}{2} + 2\delta$ folgt weiter

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) \geq \frac{\frac{c}{2} - 2\delta}{\frac{c}{2} + 2\delta}(b - a) - 2\delta = \frac{c - 4\delta}{c + 4\delta}(b - a) - 2\delta.$$

Für beliebige $t, t' \in [a, b]$ erhält man die selbe untere Schranke. Für t, t' mit $|t - t'| > c$ die selbe Argumentation führen. Für t, t' mit $|t - t'| < c$ ist nichts zu zeigen, weil γ eine c -lokale Geodätische ist. $\square$

Die nächste Proposition werden wir verwenden, um das Konjugationsproblem zu lösen.

Proposition 4.2.23. Sei (X, d) ein δ -hyperbolischer Raum. Es seien $(8\delta + 1)$ -lokal Geodätische γ_i mit $i = 1, 2, 3, 4$ gegeben, die sich wie in Abbildung 4.16 gezeigt in einem Rechteck treffen. Dann existiert eine Konstante $C = C(\delta)$, sodass jede der 4 Seiten in der C -Umgebung der 3 anderen Seiten liegt. Genauer ist für alle Wahlen von i, j, k, l mit $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ folgendes erfüllt:

$$\text{im}(\gamma_i) \subseteq U_C(\text{im}(\gamma_j) \cup \text{im}(\gamma_k) \cup \text{im}(\gamma_l)).$$

Beweis. Mit der ersten Aussage von Proposition 4.2.22 folgt, dass die γ_i alle (λ, ϵ) -quasi-Geodätische sind mit λ, ϵ wie in der Proposition. Unterteile Q in zwei quasi-geodätische Dreiecke mittels einer (λ, ϵ) -quasi-geodätischer Diagonalen. Es gibt dann eine Konstante M , die nur von δ, λ und ϵ abhängt und für die jedes (λ, ϵ) -quasi-geodätische Dreieck in X auch M -dünn ist. Dies impliziert, dass jede Seite in der C -Umgebung der drei anderen Seiten enthalten ist für $C > 2M$. Da M nur von λ, ϵ und δ abhängt und die Konstanten λ und ϵ nur von δ abhängen, hängt auch M und somit C nur von δ ab. Damit ist der Beweis komplett. $\square$

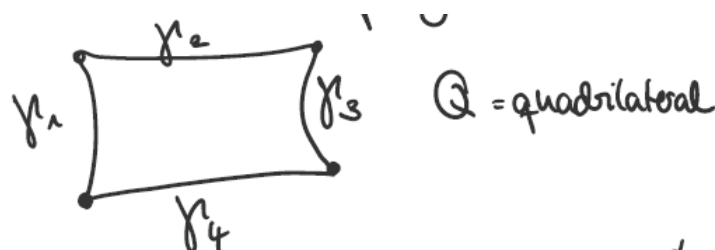


Abbildung 4.16: Die vier Geodätischen γ_i treffen sich.

Zur Vorbereitung des nächsten Beweises zeigen wir zunächst ein technisches Lemma.

Lemma 4.2.24. Sei $w \in F(S)$ mit $\pi(w)\pi(u)\pi(w^{-1}) = \pi(v)$. Betrachte das geodätische Rechteck Q in $\text{Cay}(S, G)$ mit Seiten w, u, w^{-1} und v^{-1} . Es existieren dann zyklische Permutationen u', v' von u bzw. v für die gilt: jeder Punkt auf u' mindestens Abstand $|w|$ zu v' hat.

Beweis. Angenommen es gibt Ecken a und b auf u beziehungsweise v , deren Abstand kleiner als die Länge von w ist. Sei dann $\tilde{w}$ in $F(S)$ ein Wort, das eine Geodätische von b auf v nach a auf u beschreibt. Insbesondere ist dann die Länge von $\tilde{w}$ echt kleiner als die Länge von w .

Die Ecken a bzw. b unterteilen u und v in je zwei Teilwörter u_1, u_2 und v_1, v_2 mit $u = u_1 u_2$ und $v = v_1 v_2$. Nach Konstruktion sind die Wörter $u_2 u_1$ und $v_2 v_1$ zyklische Permutationen von u und v . Ersetze w durch $\tilde{w}$ und erhalte ein neues Viereck $\tilde{Q}$ mit Seiten $\tilde{w}$, $u_2 u_1$, $\tilde{w}^{-1}$ und $v_2 v_1$. Dieses Viereck ist immer noch $(8\delta + 1)$ quasi-geodätisch aber die Außenseiten sind echt kürzer. Wiederhole das Verfahren, bis die Seiten die gewünschte Eigenschaft erreicht haben. $\square$

Das folgende Lemma ermöglicht den Algorithmus, der das Konjugationsproblem löst.

Lemma 4.2.25. *Sei G von S endlich erzeugt und der Cayleygraph bezüglich S ein δ -hyperbolischer Raum. Bezeichne mit π die natürliche Projektion von $F(S)$ nach G . Dann existiert eine unforme Konstante $K = K(\delta) > 0$, sodass folgendes gilt: Seien u, v in $F(S)$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

- (i) *Ihre Bilder $\pi(u)$ und $\pi(v)$ sind in G nicht-trivial konjugiert, d.h. es existiert ein $w \in F(S)$ mit $\pi(w) \neq 1$ und $\pi(w)\pi(u)\pi(w)^{-1} = \pi(v)$.*
- (ii) *Alle zyklischen Permutationen von u und v korrespondieren zu $(8\delta + 1)$ -lokalen Geodätischen.*

Dann gilt eine der beiden folgenden Konsequenzen:

1. $\max\{|u|, |v|\} \leq K$, oder
2. *Es existiert $\tilde{w} \in F(S)$ mit Länge $|\tilde{w}| \leq K$, sodass $\pi(\tilde{w}^{-1}\pi(u')\pi(\tilde{w})) = \pi(v')$ in G , wobei u' und v' zyklische Permutationen von u und v sind.*

Beweis. Sei $w \in F(S)$ mit $\pi(w)\pi(u)\pi(w^{-1}) = \pi(v)$. Betrachte das geodätische Rechteck Q in $\text{Cay}(S, G)$ mit Seiten w, u, w^{-1} und v^{-1} . Wegen Lemma 4.2.24 und falls nötig nach Ersetzen von u und v durch zyklische Permutationen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass jeder Punkt auf u mindestens Abstand $|w|$ zu v hat.

Bezeichne mit p den Mittelpunkt der oberen Seite, wie in Abbildung 4.17 skizziert. Dann ist mit Proposition 4.2.23 der Abstand zu den anderen drei Seiten höchstens C . Gäbe es p' auf v mit $d(p, p') \leq C$, dann wäre der Abstand der Ecken, die p und p' am nächsten sind, höchstens $C + 1$.

Ist $|w| > C + 1$, so kann das nicht passieren. In diesem Fall hätten wir eine obere Schranke $C + 1$ für $|w|$. Angenommen p habe Abstand kleiner C zu q auf einer der beiden Seiten. Seien x, y die beiden Enden der Seite. Dann gilt

$$|w| - \frac{1}{2} \leq d(p, y) \leq C + d(q, y)$$

und $d(q, y) = |w| - d(x, q)$. Das impliziert

$$d(q, y) = |w| - d(x, q) \leq C + d(q, y) + \frac{1}{2} \iff d(x, q) \leq C + \frac{1}{2}.$$

Mit Dreiecksungleichung folgt dann:

$$d(p, x) \leq d(p, q) + d(q, x) \leq 2C + \frac{1}{2}.$$

Da p die Mitte der oberen Seite ist, gilt $d(x, p) = \frac{1}{2}|u|$ und die Länge $|u|$ ist nach obigen Überlegungen durch $4C + 1$ beschränkt.

Ist $|w| > C + 1$, dann können wir mit ähnlichen Argumenten folgern, dass $|v| \leq 4C + 1$ gilt. Es folgt $K := 4C + 1$ und die Behauptung ist erfüllt. $\square$

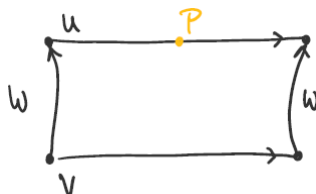


Abbildung 4.17: Der Punkt p ist Mittelpunkt der oberen Seite des Quadrilaterals Q .

4.2.3.1 Der Algorithmus zur Lösung des Konjugationsproblems

Folgender Algorithmus stellt fest, ob zwei Elemente u, v in einer δ -hyperbolischen Gruppe G bezüglich eines Erzeugendensystems S konjugiert sind.

Gegeben seien Wörter u, v über $S^\pm$.

- Betrachte u, v und alle zyklischen Permutationen dieser Wörter.
- Suche nicht-geodätische Teilwörter mit Länge höchstens $8\delta + 1$ und ersetze sie durch geodätische Teilwörter kürzerer Länge, die das selbe Gruppenelement repräsentieren.
- Wiederhole die vorangegangenen Schritte bis alle zyklischen Permutationen $(8\delta + 1)$ -lokal geodätisch sind. (Das kann mit höchstens $|u| + |v|$ Anwendungen von Relationen einer Dehn-Präsentierung erreicht werden.)
- Lemma 4.2.25 liefert dann eine endliche Menge an Wörtern Σ , sodass gilt: u und v sind genau dann in der Gruppe G konjugiert, wenn ein Wort $w \in \Sigma$ existiert mit $w^{-1}u'w = v'$, wobei u' und v' zyklische Permutationen von u und v sind. $(\star)$

Mithilfe des Dehn-Algorithmus zur Lösung des Wortproblems kann entschieden werden, ob $(\star)$ erfüllt ist. Eine mögliche Wahl für Σ ist die Vereinigung der Menge aller Wörter der Länge kleiner gleich K , der Konstante aus Lemma 4.2.25, mit der Menge, die für jedes paar konjugierter Elemente u_0 und v_0 mit $\max\{|u_0|, |v_0|\} \leq K$ ein ausgewähltes konjugierendes Element u enthält.

Bibliographie

- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger.
Metric spaces of non-positive curvature, volume 319 of Grundlehren Math. Wiss.
Berlin: Springer, 1999.
- [Bog08] Oleg Bogopolski.
Introduction to group theory.
EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.
Translated, revised and expanded from the 2002 Russian original.
- [CM17] Matt Clay and Dan Margalit, editors.
Office hours with a geometric group theorist.
Princeton, NJ: Princeton University Press, 2017.
- [Löh17] Clara Löh.
Geometric group theory. An introduction.
Universitext. Cham: Springer, 2017.
- [Ros10] Stephan Rosebrock.
Geometrische Gruppentheorie. Ein Einstieg mit dem Computer. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht.
Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2nd corrected and updated edition edition, 2010.