

# Geometrische Gruppentheorie

Prof. Dr. Petra Schwer

Universität Heidelberg, [schwer@uni-heidelberg.de](mailto:schwer@uni-heidelberg.de)

Wintersemester 2025/26



Vorlesungsskript mit Übungen für ca 28 Vorlesungen á 90 Minuten.

Es wird keine Algebraische Topologie vorausgesetzt. Daher ist an einigen Stellen ein anderer Beweis oder eine leicht umständlichere Formulierung gewählt als es mit der Sprache von Fundamentalgruppen und Überlagerungen möglich wäre.

Danke an Marco Lotz, der die erste Version dieses Skriptes getippt hat. Danke an Paula Conrad fürs Überarbeiten und ganz viel Detailarbeit. Danke an Marco Lotz, Jose Quintanilha, Yuri Santos Rego und Anna Schilling für zahlreiche Übungsaufgaben.

Kommentare und Hinweise gerne an **`schwer@uni-heidelberg.de`** schicken. Danke.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen über Gruppen</b>	<b>1</b>
1.1	Gruppen als Symmetrien von Objekten . . . . .	1
1.2	Neue Gruppen aus alten . . . . .	6
1.3	Gruppenwirkungen und Graphen . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Freie Gruppen und Gruppenpräsentierungen</b>	<b>18</b>
2.1	Freie Gruppen . . . . .	18
2.2	Freie Gruppen und Bäume . . . . .	23
2.3	Endlich präsentierte Gruppen . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Cayleygraphen und Quasi-Isometrie</b>	<b>40</b>
3.1	Metrische Graphen und geodätische metrische Räume . . . . .	40
3.2	Cayleygraphen erkennen . . . . .	46
3.3	Quasi-Isometrie und das Milnor-Švarc Lemma . . . . .	47
3.4	Quasi-Isometrie-Invarianten . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Hyberbolizität</b>	<b>66</b>
4.1	Hyperbolische Räume und Gruppen . . . . .	66
4.2	Das Wortproblem . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Weitere Quasi-Isometrie Invarianten</b>	<b>88</b>
5.1	Gruppenwachstum . . . . .	88
5.2	Enden von Gruppen . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>104</b>
6.1	Grundlagen über Gruppen . . . . .	104
6.2	Freie Gruppen und Gruppenpräsentierungen . . . . .	109
6.3	Cayleygraphen und Quasi-Isometrie . . . . .	110
6.4	Hyberbolizität . . . . .	113
6.5	Weitere Quasi-Isometrie Invarianten . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Organisatorische Hinweise</b>	<b>114</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>117</b>



# 3 Cayleygraphen und Quasi-Isometrie

Cayleygraphen sind Graphen, die einem Paar  $(G, S)$  zugeordnet werden, wobei  $G$  eine Gruppe und  $S$  ein Erzeugendensystem ist. Ein Cayleygraph enthält je eine Ecke pro Gruppenelement, die mit Kanten verbunden sind, wenn sich die entsprechenden Gruppenelemente genau durch rechts-Multiplikation mit einem Erzeuger unterscheiden. Die Betrachtung von Cayleygraphen als geometrisches Bild einer Gruppe geht auf Max Dehn zurück. Im Allgemeinen sind Cayleygraphen zu verschiedenen Erzeugendensystemen der selben Gruppe nicht isomorph zueinander. Man kann sie dennoch als geometrische Version der Gruppe betrachten, da sie in einem groben Sinn - nämlich bis auf quasi-Isometrie - eindeutig sind. Der Satz von Milnor und Švarc (Theorem 3.3.9) erweitert diese geometrische Betrachtungsweise für Gruppen um weitere beliebige geodätische metrische Räume, auf denen die Gruppen geeignet wirken und bildet damit den Grundstein für viele weitere Methoden der geometrischen Gruppentheorie.

## 3.1 Metrische Graphen und geodätische metrische Räume

Cayleygraphen haben wir bereits in Definition 1.3.19 eingeführt. Ziel dieses Kapitels ist es, Cayleygraphen als metrische Räume zu betrachten und deren Eigenschaften genauer zu untersuchen. Insbesondere wollen wir verstehen, welche Eigenschaften einer Gruppe genau in ihren Cayleygraphen kodiert sind und in welchem Sinne alle Cayleygraphen einander entsprechen.

**Definition 3.1.1** (Längen von Kurven). Sei  $(X, d)$  metrischer Raum und sei  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  stetig, also eine Kurve in  $X$ . Dann ist die *Länge* von  $\alpha$  gegeben durch

$$l(\alpha) := \sup \sum_{i=0, \dots, n-1} d(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})).$$

Das Supremum wird hier über alle Zerlegungen des Intervalls  $[0, 1]$  gebildet, d.h. über alle Wahlen von  $t_i$  mit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  für beliebige  $n \in \mathbb{N}$ .

Insbesondere gilt für alle Kurven  $\alpha$ , dass  $l(\alpha) \geq d(\alpha(0), \alpha(1))$  ist. Für die Verkettung  $\alpha * \beta$  zweier Pfade  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\alpha(1) = \beta(0)$  gilt außerdem  $l(\alpha * \beta) = l(\alpha) + l(\beta)$ .

Die obige Formel zur Längenberechnung können wir nutzen, um in der metrischen Realisierung eines Graphen eine Abstandsfunktion zu definieren.

**Definition 3.1.2** (Metrische Realisierung eines Graphen). Wir können einen Graphen  $\Gamma = (V, E, \delta)$  metrisch realisieren, d.h. einen metrischen Raum definieren, dessen unterliegende kombinatorische Struktur gerade der gegebene Graph ist. Dazu versehen wir zunächst jede Kante  $e$  mit einem Label, d.h. wir ordnen der Kante eine positive Zahl  $l(e)$  zu, die wir *Länge der Kante* nennen.

Identifiziere jedes Ende einer Kante  $e$  mit je einem Ende des Intervalls  $[0, l(e)]$ . Sind die Kanten in  $\Gamma$  orientiert, so identifizieren wir immer die Quelle der Kante mit 0 und die Senke der Kante mit  $l(e)$ .

Die *metrische Realisierung*  $|\Gamma|$  von  $\Gamma$  ist folgender metrischer (Quotienten-)Raum: Als Menge ist die metrische Realisierung gegeben durch

$$|\Gamma| = \bigcup_{e \in E} [0, l(e)] / \sim,$$

wobei wir die Endpunkte zweier Intervalle genau dann miteinander identifizieren, wenn die zugehörigen Ecken in  $\Gamma$  identisch sind.

Definiere eine Abstandsfunktion  $d : |\Gamma| \times |\Gamma| \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  wie folgt:

$$d(x, y) = \inf_{\gamma: x \rightsquigarrow y} l(\gamma)$$

wobei das Infimum über alle stetigen Pfade  $\gamma : [0, 1] \rightarrow |\Gamma|$  von  $x$  nach  $y$  gewählt ist, deren Länge durch die Formel in Definition 3.1.1 berechnet wird. Dabei wählen wir die Zerlegungen so, dass die Teilabschnitte der Kurve jeweils in einem Intervall enthalten sind.

**Definition 3.1.3** (Geodätische und geodätischer Raum). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  ein Pfad in  $X$ .

1. Der Pfad  $\gamma$  ist eine *Geodätische* in  $X$ , wenn gilt:  $l(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$ .
2. Der Pfad  $\gamma$  ist eine *lokale Geodätische*, wenn für alle  $t \in [0, 1]$  ein  $\epsilon > 0$  existiert für das  $\gamma|_{[t-\epsilon, t+\epsilon]}$  eine Geodätische ist.
3. Ein metrischer Raum  $X$  heißt *geodätisch*, wenn für alle Paare  $x, y \in X$  eine Geodätische von  $x$  nach  $y$  existiert, d.h. eine Geodätische  $\alpha$  mit  $\alpha(0) = x$ ,  $\alpha(1) = y$ .

Beispiele für geodätische metrische Räume sind metrische Realisierungen von Graphen, der euklidische Raum oder allgemeiner glatte, Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

**Beispiel 3.1.4.** Nicht jeder metrische Raum ist geodätisch. Betrachte zum Beispiel als metrischen Raum  $X$  die Menge  $\mathbb{R}^2$  ohne den Ursprung mit eingeschränkter euklidischer

Metrik. Dann ist  $X$  selbstverständlich ein metrischer Raum, der aber nicht geodätisch ist. Für beliebige Paare von Punkten  $x, y$ , die auf verschiedenen Seiten des Ursprungs auf einer Ursprungsgeraden liegen, gibt es keine verbindende Geodätische.

Auch müssen Geodätische in metrischen Räumen nicht eindeutig sein. Es kann passieren, dass es zwischen zwei Punkten viele, möglicherweise sogar unendlich viele Geodätische gibt. Als Beispiel betrachte die in  $\mathbb{R}^3$  eingebettete 2-Sphäre mit der üblichen intrinsischen Metrik. Dann gibt es zwischen Nord- und Südpol unendlich viele Geodätische, die entlang der Längengrade verlaufen.

**Definition 3.1.5** (Metrisch realisierte Cayleygraphen). Die *metrische Realisierung eines Cayleygraphen*  $\text{Cay}(G, S)$  ist die metrische Realisierung von  $\text{Cay}(G, S)$  wie in Definition 3.1.2, mit Kantenlänge  $l(e) = 1$  für alle Kanten  $e$ .

*Bemerkung 3.1.6.* Analog zu Definition 3.1.5 erhalten wir auch eine Metrik auf  $|\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)|$  (durch Ignorieren der Orientierung), sowie eine Metrik auf  $G$ , also den Ecken des Cayleygraphen, durch Einschränken der Metrik.

**Definition 3.1.7** (Wortmetrik). Für zwei Elemente  $g, h \in G$  definieren wir die *Wortmetrik*

$$d_S(g, h) := \min\{n \mid \text{es ex. } s_1, \dots, s_n \in S \text{ mit } g^{-1}h = s_1 \dots s_n\}.$$

**Lemma 3.1.8.** Für  $G$  erzeugt von  $S$  und alle  $g, h \in G$  gilt:

1. Für die Wortmetrik gilt  $d_S(g, h) = 0$  genau dann, wenn  $g = h$  ist.
2. Die Wortmetrik aus Definition 3.1.7 stimmt mit der eingeschränkten Metrik der geometrischen Realisierung des Cayleygraphen aus Definition 3.1.5 überein.

*Beweis.* Siehe Übungsaufgabe Übungsaufgabe 6.3.1. □

**Lemma 3.1.9** (Eigenschaft der Linkstranslation). Sei  $G$  eine durch  $S$  endlich erzeugte Gruppe. Dann ist die Linkstranslationswirkung von  $G$  auf  $|\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)|$  und  $|\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)|$  eine Wirkung durch Isometrien.

*Beweis.* Fixiere ein Erzeugendensystem  $S$ . Definiere für alle  $g \in G$  einen Automorphismus  $\phi_g$  auf dem metrisch realisierten Cayleygraphen durch  $\phi_g(x) := gx$  für alle Ecken  $x \in G$ . Für Punkte  $x$  auf einer metrisch realisierten Kante  $\{h_1, h_2 = h_1s\}$  definiere  $\phi_g(x)$  als den eindeutigen Punkt  $x'$  auf der Kante  $\{gh_1, gh_2\}$ , für den gilt  $d(gh_1, x') = d(h_1, x)$ . Man kann nachrechnen, dass die so definierten Abbildungen  $\phi_g$  für alle  $g \in G$  Isometrien des metrisch realisierten Cayleygraphen sind. Insbesondere gilt  $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$ . □



**Lemma 3.1.10** (Eigenschaften von  $|\text{Cay}(G, S)|$ ). Für jede Gruppe  $G$  mit endlichem Erzeugendensystem  $S$  gilt:

1. Sowohl der orientierte als auch der unorientierte Cayley Graph ist eigentlich bzgl. der Wortmetrik  $d_S$ , d.h. abgeschlossene Bälle sind kompakt. Die geometrischen Realisierungen sind ebenfalls eigentlich.
2. Der metrische Raum  $|\text{Cay}(G, S)|$  ist geodätisch.

*Beweis.* Die erste Eigenschaft folgt aus der Tatsache, dass jeder Ball von endlichem, ganzzahligem Radius die Vereinigung endlich vieler Kanten ist. Ebenso lässt sich jeder andere Ball mit endlichem Radius durch endlich viele Kanten überdecken.

Um 2. zu zeigen gehen wir wie folgt vor. Die Einschränkung der Metrik der metrischen Realisierung auf die Ecken des Cayleygraphen entspricht der Wortmetrik  $d_S$ . Somit ist der Abstand zweier Ecken  $g, h \in G$  gerade die Wortlänge von  $g^{-1}h$ . Jedes kürzeste Wort für  $g^{-1}h$  definiert somit einen Kantenzug, der eine Geodätische  $g \rightsquigarrow h$  entspricht. Somit haben wir bereits Geodätische für beliebige Paare von Ecken konstruiert.

Sind  $x, y$  Punkt auf einer selben Kante, so existiert eine Geodätische von  $x$  nach  $y$  innerhalb dieser Kante.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, dass zwei Punkte  $x, y \in |\text{Cay}(G, S)|$  gegeben sind, die nicht beide Ecken sind und nicht beide in einer Kante liegen. In diesem Fall wähle  $g$  und  $h$  so, dass sowohl  $d(x, g)$  als auch  $d(y, h) < 1$  ist, und  $d(x, g) + d_S(g, h) + d(h, y)$  kleinstmöglich ist. Für die so gewählten Ecken  $g$  und  $h$  gilt  $d(x, y) = d(x, g) + d_S(g, h) + d(h, y)$ .

Man prüfe leicht nach, dass dann die Verkettung der drei Geodätischen  $x \rightsquigarrow g, g \rightsquigarrow h$  und  $h \rightsquigarrow y$  ebenfalls eine Geodätische von  $x$  nach  $y$  liefert.  $\square$

Mit den bisherigen Betrachtungen dieses Kapitels wissen wir nun, dass jede endlich erzeugte Gruppe auf eigentlichen, geodätischen Räumen (nämlich der metrischen Realisierung ihrer Cayleygraphen) wirkt. Das mag erst einmal richtig gut klingen und wird in der Tat auch noch sehr nützlich sein. Aber Achtung: ohne weitere Annahmen an die Wirkung bzw. den Raum ist das nicht besonders hilfreich, da jede beliebige Gruppe (trivial) auf dem Ein-Punkt-Raum wirkt, der die selben Eigenschaften besitzt.

Im Gegensatz dazu hat die Wirkung auf den Cayleygraphen gute Eigenschaften, die dann weitreichende Konsequenzen haben.

**Definition 3.1.11** (Eigentlich diskontinuierliche Wirkungen). Eine Wirkung einer Gruppe  $G$  auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt *eigentlich diskontinuierlich*, falls für alle Bälle  $B \subseteq X$  gilt

$$|\{g \in G \mid B \cap g.B \neq \emptyset\}| < \infty.$$

Das heißt: für alle  $x \in X$  und alle Bälle  $B \subseteq X$  ist nur für endlich viele  $g \in G$  der Punkt  $g.x$  ebenfalls in  $B$ .

**Lemma 3.1.12** (Eigenschaften eigentlich diskontinuierlicher Wirkungen). *Eine Gruppe  $G$  wirke eigentlich diskontinuierlich auf einem metrischen Raum  $(X, d)$ . Dann gilt:*

1. *Punktstabilisatoren sind endlich, d.h. für alle  $x \in X$  ist der Stabilisator  $G_x := \{g \in G \mid g.x = x\}$  eine endliche Menge.*
2. *Orbiten der  $G$ -Wirkung auf  $X$  haben keine Häufungspunkte als Teilmengen von  $X$ .*

*Beweis.* Diese Eigenschaften folgen direkt aus Definition 3.1.11. □

**Definition 3.1.13** (Kobeschränkte Wirkungen). Eine Wirkung einer Gruppe  $G$  auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt *kobeschränkt*, wenn es einen Ball  $B \subseteq X$  gibt mit  $G.B = X$

**Lemma 3.1.14** (Eigenschaften von  $G \curvearrowright \text{Cay}(G, S)$ ). *Sei  $G$  endlich erzeugte Gruppe. Dann ist die Linkstranslationswirkung auf einem beliebigen Cayleygraphen eigentlich diskontinuierlich und kobeschränkt.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass die Linkstranslationswirkung eigentlich diskontinuierlich ist. Sei  $v$  eine Ecke in  $\Gamma := \text{Cay}(G, S)$ . Dann ist  $G.v = V(\Gamma)$ . Es ist klar, dass jeder Ball mit endlichem Radius um  $v$  nur endlich viele andere Ecken enthält. Da die Wirkung frei ist folgt daraus bereits die Behauptung.

Für die Kobeschränktheit betrachte als geeignetes  $B$  einen Ball mit Radius 1 um eine beliebige Ecke. □

Wir lernen jetzt eine erste Anwendung dieser *schönen* Wirkungen auf *guten* metrischen Räumen kennen. Dabei nutzen wir folgende Sprechweise:

**Definition 3.1.15** (Virtuell P). Eine Gruppe  $G$  hat *virtuell die Eigenschaft  $P$* , wenn die Gruppe  $G$  eine Untergruppe  $H$  von endlichem Index in  $G$  besitzt, die die Eigenschaft  $P$  besitzt.

Hat  $G$  virtuell  $P$  so muss  $G$  selbst nicht unbedingt die Eigenschaft  $P$  haben.

**Theorem 3.1.16** (Virtuell- $\mathbb{Z}$  Gruppen). *Ist  $G$  endlich erzeugt und wirkt eigentlich diskontinuierlich und kobeschränkt durch Isometrien auf  $\mathbb{R}$ , so ist  $G$  virtuell  $\mathbb{Z}$ , d.h.  $G$  besitzt eine Untergruppe von endlichem Index, die zu  $\mathbb{Z}$  isomorph ist.*

*Beweis.* Bezeichne mit  $\Psi : G \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{R})$  die Wirkung von  $G$  auf  $\mathbb{R}$ . Der Raum  $\mathbb{R}$  ist geordnet und jeder Isomorphismus von  $\mathbb{R}$  ist entweder ordnungserhaltend (alle Translationen) oder ordnungsumkehrend (beispielsweise Spiegelungen). Das erlaubt uns, folgenden

Homomorphismus zu betrachten:

$$\text{Iso}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \quad \phi \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } \phi \text{ die Ordnung umkehrt} \\ 0 & \text{wenn } \phi \text{ die Ordnung erhält} \end{cases}.$$

Sei  $K$  der Kern dieses Homomorphismus. Dann ist  $G' := \Psi^{-1}(K \cap \Psi(G))$  eine Untergruppe von  $G$  und der Index von  $G'$  in  $G$  ist höchstens 2. Jedes  $g \in G'$  wirkt durch Translation auf  $\mathbb{R}$ , weil es die Ordnung erhält. Sei nun  $m$  das Infimum des positiven Teils des Orbits der Null, d.h.

$$m := \inf(G'.0 \cap \mathbb{R}_{>0}).$$

Aus der Kobeschränktheit der Wirkung erhalten wir, dass  $G'.0 \cap \mathbb{R}_{>0} \neq \emptyset$ . Da die Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist, folgt außerdem, dass das Infimum ein Minimum sein muss, da kein Orbit Häufungspunkte hat. Also gilt insbesondere  $m > 0$ .

Betrachte jetzt die Abbildung

$$\varphi : G' \rightarrow \mathbb{R} : g \mapsto \Psi(g)(0).$$

Dann ist  $\varphi(G') \subseteq m\mathbb{Z}$ . Wir zeigen, dass  $\varphi$  ein Homomorphismus ist. Sei für  $g \in G'$  die Zahl  $t_g \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\Psi(g)(x) = x + t_g.$$

Ein solche Wahl für die  $t_g$  ist möglich, da  $G'$  durch Translationen wirkt. Insbesondere ist dann  $\varphi(g) = \Psi(g)(0) = t_g$  und somit auch

$$t_{gh} = \varphi(gh)(0) = \varphi(g)(0) + \varphi(h)(0) = t_g + t_h.$$

Weiter ist mit Lemma 3.1.12 die Menge  $F := \text{Ker}(\varphi) = \text{Stab}_{G'}(0)$  endlich, da die Wirkung von  $G$  auf  $\mathbb{R}$  eigentlich diskontinuierlich ist. Somit ist

$$1 \rightarrow F \rightarrow G' \xrightarrow{\varphi} m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

eine exakte Sequenz mit Schnitt  $s : m\mathbb{Z} \rightarrow G'$  für den gilt  $\varphi \circ s = \text{id}$ . Das Bild  $s(m\mathbb{Z})$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$  und hat in  $G'$  endlichen Index. Weil  $G'$  in  $G$  endlichen Index hat, hat dann auch  $s(m\mathbb{Z})$  endlichen Index in  $G$  und liefert uns eine Untergruppe mit der gesuchten Eigenschaft.  $\square$

## 3.2 Cayleygraphen erkennen

Wir gehen jetzt der Frage nach, welche Graphen überhaupt als Cayleygraphen auftauchen können.

**Definition 3.2.1** (Äquivalente Wirkungen). Zwei Wirkungen  $\rho_1 : G \rightarrow \text{Aut}(X_1)$  und  $\rho_2 : G \rightarrow \text{Aut}(X_2)$  heißen *äquivalent*, wenn ein Isomorphismus  $f : \text{Aut}(X_1) \rightarrow \text{Aut}(X_2)$  existiert, sodass für alle  $g \in G$  und alle  $x_i \in X_i$  gilt:

$$g \cdot f(x_i) = f(g \cdot x_i).$$

Wirkungen auf Graphen sind *äquivalent*, wenn sowohl die Ecken- als auch die Kantenwirkungen äquivalent sind im obigen Sinne.

Cayleygraphen kann man anhand ihrer Automorphismen wie folgt erkennen.

**Theorem 3.2.2** (Satz von Sabidussi). Sei  $\Gamma$  ein schleifenfreier Graph und  $G$  eine Gruppe. Dann gilt:

1. Eine Wirkung von  $G$  auf  $\Gamma$  ist genau dann äquivalent zur Linkstranslationswirkung von  $G$  auf  $\text{Cay}(G, S)$  für ein (geeignetes) reduziertes Erzeugendensystem  $S$  von  $G$ , wenn die Eckenwirkung von  $G$  auf  $V(\Gamma)$  transitiv und fixpunktfrei ist.
2. Der Graph  $\Gamma$  ist genau dann ein Cayleygraph einer Gruppe  $G$  bezüglich eines reduzierten Erzeugendensystems  $S$ , wenn  $\text{Aut}(\Gamma)$  eine Untergruppe enthält, die transitiv und fixpunktfrei auf  $V(\Gamma)$  wirkt.

*Beweis.* Teil 2 des Satzes lässt sich leicht aus dem ersten Teil ableiten, da die Linkstranslationswirkung transitiv und fixpunktfrei auf den Ecken von  $\Gamma$  wirkt.

Für 1. argumentiere wie folgt: Ist die Linkstranslationswirkung äquivalent zur  $G$ -Wirkung, dann entspricht die Eckenwirkung gerade der Multiplikation in  $G$  und ist somit transitiv und fixpunktfrei. Sei umgekehrt die Eckenwirkung transitiv und fixpunktfrei, so argumentiere in mehreren Schritten wie folgt.

Schritt 1: Wir definieren ein Erzeugendensystem  $S$ . Wähle dazu zunächst eine feste Ecke  $x$  in  $\Gamma$  und setze

$$\bar{S} := \{g \in G \mid \text{Die Ecken } g \cdot x \text{ und } x \text{ sind benachbart}\}.$$

Sei jetzt  $s \in \bar{S}$ . Dann ist nach Definition  $e = \{x, sx\}$  eine Kante in  $\Gamma$ . Da  $G$  durch Automorphismen auf  $\Gamma$  wirkt, ist aber auch  $s^{-1}e = \{s^{-1}x, x\}$  eine Kante. Daraus folgt, dass die Menge  $\bar{S}$  abgeschlossen ist unter Inversenbildung.

Da die Eckenwirkung fixpunktfrei ist, gilt für ein  $s \in \bar{S}$  entweder, dass  $s^{-1}x = sx$  und damit  $s = s^{-1} \in \bar{S}$ , oder es gilt  $s^{-1}x \neq sx$  und damit auch  $s^{-1} \neq s$  und beide sind in  $\bar{S}$

enthalten.

Definiere nun eine Menge  $S$  wie folgt: Für  $s = s^{-1}$  in  $\bar{S}$  sei  $s \in S$ . Für  $s \neq s^{-1}$  in  $\bar{S}$  wähle eines der beiden Elemente aus und sei dieses in  $S$ . Wir können die Wahl so treffen, dass für alle benachbarten Ecken  $y$  von  $x$  gilt, dass  $y = sx$  für ein  $s$  in  $S$  ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $S$  die Gruppe  $G$  wirklich erzeugt<sup>1</sup>.

**Schritt 2:** Wir definieren jetzt einen Morphismus von Graphen. Sei jetzt  $\Gamma' := \text{Cay}(G, S) = (V', E')$ . Wir suchen einen Morphismus  $f : \Gamma' \rightarrow \Gamma = (V, E)$ . Sei  $x$  die oben fixierte Ecke. Für  $h \in G$  setze dazu  $f(h) := hx$ . Ist  $e = \{h_1, h_2\}$  eine Kante in  $\Gamma'$ , so existiert (nach Definition) ein  $s \in S$  mit  $h_2 = h_1s$ . Dann ist  $f(h_2) = h_2x = h_1sx$  und  $f(h_1) = h_1x$  und  $\{h_1sx, h_1x\} = h_1.e$  ist eine Kante, da für alle  $s \in S$  die Ecken  $sx$  und  $x$  benachbart sind. Somit ist  $f$  ein Morphismus von Graphen.

**Schritt 3:** Es bleibt noch zu zeigen, dass der Morphismus  $f$  aus Schritt 2 ein Isomorphismus ist. Die Abbildung  $f$  ist injektiv, da die Eckenwirkung  $\rho_V$  fixpunktfrei ist. Daher gilt, dass aus  $gx = hx$  folgt, dass  $g^{-1}hx = x$ . Somit ist  $g^{-1}h = 1$ . Die Abbildung  $f$  ist aber auch surjektiv, da  $\rho_V$  transitiv ist und daher für alle  $y \in V$  ein  $g \in G$  existiert mit  $gx = y$ . Es ist dann aber  $y = f(g)$ .

Es ist noch zu zeigen, dass für jede Kante  $e = \{y_1, y_2\}$  in  $\Gamma$  auch  $f^{-1}(e)$  eine Kante in  $\Gamma'$  ist. Siehe dazu Übungsaufgabe 6.3.2.  $\square$

### 3.3 Quasi-Isometrie und das Milnor-Švarc Lemma

In diesem Kapitel untersuchen wir, inwieweit  $\text{Cay}(G, S)$  von der Wahl eines Erzeugendensystems  $S$  abhängt. Hintergrund dafür ist, dass es einige relevante Eigenschaften von Gruppen gibt, die unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems gelten. Meist möchte man eine Gruppe  $G$  unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems betrachten.

**Definition 3.3.1** (quasi-isometrische Einbettung). Seien  $X, Y$  metrische Räume und sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Weiter seien zwei reelle Konstanten  $C \geq 1$  und  $D \geq 0$  gegeben. Dann ist  $f$  eine  $(C, D)$ -quasi-isometrische Einbettung, wenn für alle  $x, y \in X$  gilt:

$$\frac{1}{C}d(x, y) - D \leq d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y) + D.$$

Eine  $(C, D)$ -quasi-isometrische Einbettung  $f$  hat *quasi-dichtes Bild* in  $Y$ , wenn für alle  $y \in Y$  ein  $x \in X$  existiert mit  $d(f(x), y) \leq D$ .

Eine  $(C, D)$ -quasi-Isometrie ist eine  $(C, D)$ -quasi-isometrische Einbettung mit quasi-dichtem Bild.

<sup>1</sup>Einen Beweis gibt es zum Beispiel hier: <https://www.math.uni-hamburg.de/home/hamann/Lehre/GeoGrTh/GeoGrTh.pdf> siehe Satz 1.3.2. In der Vorlesung hatten wir den Beweis auch durchgeführt.

**Bemerkung 3.3.2.** Wir sagen  $f$  ist eine *quasi-isometrische Einbettung*, wenn es eine  $(C, D)$ -quasi-Isometrie für eine geeignete Wahl von  $C$  und  $D$  ist. Eine  $(C, 0)$ -quasi-isometrische Einbettung ist gerade eine Bilipschitz-Einbettung.

**Beispiel 3.3.3.** Die Inklusionsabbildungen von  $2\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{R}$  sind quasi-isometrische Einbettungen (mit  $C = 1$  und  $D = 0$ ), aber keine bilipschitz-Äquivalenzen, da sie nicht surjektiv sind. Vergleiche dazu Abbildung 3.1

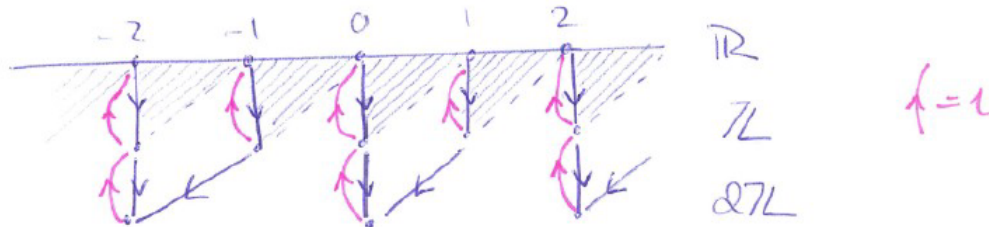


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der Einbettungen.

**Definition 3.3.4** (quasi-Inverse). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist  $g : Y \rightarrow X$  eine *quasi-Inverse* von  $f$ , wenn es ein  $D \geq 0$  gibt, sodass für alle  $x \in X$  gilt:

$$d_X((g \circ f)(x), x) \leq D$$

und sodass für alle  $y \in Y$  gilt:

$$d_Y((f \circ g)(y), y) \leq D.$$

**Beispiel 3.3.5.** Die Wahl des größten Ganzen, d.h. die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto \lfloor x \rfloor,$$

sowie die Abbildung

$$g : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z} : x \mapsto \begin{cases} x & x \text{ gerade} \\ x - 1 & x \text{ ungerade} \end{cases}$$

sind beides quasi-isometrische Einbettungen mit  $C = 1 = D$ . Die Abbildungen  $g$  und  $f$  sind quasi-Inverse der Inklusionsabbildungen von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{R}$  beziehungsweise  $2\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$ . Insbesondere haben  $f \circ \iota$  und  $\iota \circ f$  endlichen Abstand zur Identitätsabbildung  $id$  (ebenso  $g \circ \iota$  und  $\iota \circ g$ ). Siehe dazu die pinken Pfeile in Abbildung 3.1 zur Veranschaulichung.

Wir zeigen jetzt ein paar elementare Eigenschaften von quasi-isometrischen Einbettungen und quasi-Isometrien.

**Lemma 3.3.6** (Eigenschaften von quasi-Isometrien).

1. Die Verkettung quasi-isometrischer Einbettungen (von quasi-Isometrien) ist wieder eine quasi-isometrische Einbettung (quasi-Isometrie).
2. Sei  $f$  eine quasi-isometrische Einbettung. Dann ist  $f$  eine quasi-Isometrie genau dann, wenn es eine quasi-Inverse besitzt.
3. Quasi-isometrisch zu sein ist eine Äquivalenzrelation.

Insbesondere bildet die Menge aller quasi-Isometrien eines Raumes eine Gruppe.

*Beweis.* Beweis von 1: Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  quasi-isometrische Einbettungen bezüglich  $(C, D)$ . Dann gilt für alle  $x, y \in X$

$$\begin{aligned} d(g(f(x)), g(f(y))) &\leq C \cdot d(f(x), f(y)) + D \\ &\leq C^2 \cdot d(x, y) + C \cdot D + D. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt Folgendes: Für  $f, g$  zwei  $(C, D)$ -quasi-Isometrien, wähle  $z \in Z$ . Es existieren also ein  $y \in Y$  mit  $d(g(y), z) \leq D$  und ein  $x \in X$  mit  $d(f(x), y) \leq D$  (wegen der quasi-Dichtheit).

Somit ist

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(x), z) &\leq d((g \circ f)(x), g(y)) + d(g(y), z) \\ &\leq (CD + D) + D. \end{aligned}$$

Also ist  $g \circ f$  eine quasi-isometrische Einbettung.

Für 2. siehe Übungsaufgabe 6.3.3.

Teil 3 der Behauptung folgt aus den ersten beiden mit der zusätzlichen Beobachtung dass die Identitätsabbildung eine quasi-Isometrie eines Raumes auf sich selbst ist.  $\square$

Jetzt können wir zeigen, dass sich zwei Cayleygraphen einer Gruppe  $G$  bis auf Quasi-Isometrie übereinstimmen.

**Theorem 3.3.7** (Cayleygraphen sind quasi-isometrisch). Sei  $G$  eine Gruppe mit endlichen Erzeugendensystemen  $S$  und  $S'$ . Dann erweitert  $id : G \rightarrow G$  zu einer quasi-Isometrie  $\text{Cay}(G, S) \rightarrow \text{Cay}(G, S')$ .

*Beweis.* Betrachte folgende Verkettung von Abbildung von  $\text{Cay}(G, S)$  nach  $\text{Cay}(G, S')$

$$\text{Cay}(G, S) \xrightarrow{\Psi} (G, d_S) \xrightarrow{id} (G, d_{S'}) \xrightarrow{\iota} \text{Cay}(G, S'),$$

wobei  $\Psi$  so gewählt ist, dass  $x \in \text{Cay}(G, S)$  auf  $g \in G$  abgebildet wird mit  $d_S(x, g) \leq \frac{1}{2}$ . Mit  $\iota$  sei die Inklusionsabbildung bezeichnet. Beide Abbildungen  $\Psi$  und  $\iota$  sind  $(1, 1)$ -quasi-Isometrien. Also ist  $\Psi \circ id \circ \iota$  genau dann eine quasi-Isometrie, wenn  $id$  eine quasi-

Isometrie ist. Da  $id$  surjektiv ist, rechnen wir nach, dass  $id_G$  eine  $(C, 0)$ -quasi-Isometrie ist. Setze dazu

$$c := \max_{s \in S^\pm} d_{S'}(\mathbb{1}, s).$$

Es ist  $c < \infty$ , da  $S$  endlich ist. Seien  $g, h \in G$  und  $n := d_S(g, h)$ . Dann existieren  $s_i \in S \cup S^{-1}$ , sodass  $g^{-1}h = s_1 \cdots s_n$ . Mit der Dreiecksungleichung und da  $d_{S'}$  links-invariant ist, folgt:

$$\begin{aligned} d_{S'}(id_G(g), id_G(h)) &= d_{S'}(g, h) \\ &= d_{S'}(g, gs_1 \cdots s_n) \\ &\leq d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1s_2) + \cdots + d_{S'}(gs_1 \cdots s_{n-1}, gs_1 \cdots s_n) \\ &= d_{S'}(\mathbb{1}, s_1) + d_{S'}(\mathbb{1}, s_2) + \cdots + d_{S'}(\mathbb{1}, s_n) \\ &\leq n \cdot C = C \cdot d_S(g, h). \end{aligned}$$

Vertausche die Rollen von  $S$  und  $S'$  und erhalte

$$d_S(id_G(g), id_G(h)) \leq \tilde{C} \cdot d_{S'}(g, h),$$

wobei  $\tilde{C} := \max\{d_S(\mathbb{1}, s') \mid s' \in S'\}$ . Setze nun  $C_0 := \max\{C, \tilde{C}\}$ . Dann ist  $id_G$  eine  $(C_0, 0)$  quasi-Isometrie.  $\square$

Aus der Ferne sehen also alle Caylegraphen von  $G$  gleich aus.

*Bemerkung 3.3.8.* Theorem 3.3.7 ist im Allgemeinen falsch für unendliche Erzeugendensysteme: Betrachte zum Beispiel  $(\mathbb{Z}, +)$  mit Erzeugendensystem  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Der Cayleygraph  $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$  hat dann endlichen Durchmesser, aber der Cayleygraph von  $(\mathbb{Z}, +)$  bezüglich dem Erzeugendensystem  $\{1\}$  hat unendlichen Durchmesser. Ein Raum mit endlichem Durchmesser kann nicht zu einem Raum mit unendlichem Durchmesser quasi-isometrisch sein.

Folgender Satz ist das fundamentale Theorem der geometrischen Gruppentheorie und ein wesentlicher Grund dafür, dass man sich für Gruppen bis auf quasi-Isometrie interessiert.

**Theorem 3.3.9** (Milnor-Švarc-Lemma). *Sei  $G$  eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierlich und kobeschränkt auf einem geodätischen metrischen Raum  $(X, d)$  durch Isometrien wirkt. Dann gilt:*

1. *Die Gruppe  $G$  ist endlich erzeugt und*
2.  *$G$  ist quasi-isometrisch zu  $X$ .*

**Korollar 3.3.10.** *Seien  $G$  und  $X$  wie in Theorem 3.3.9 gegeben und sei  $S$  ein endliches Erzeugendensystem für  $G$ . Dann sind  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$  und  $\text{Cay}(G, S)$  quasi-isometrisch zu  $X$ .*



*Beweis.* Das folgt direkt aus der Eigenschaft, dass  $(G, d_S) \sim_{\text{q.i.}} \text{Cay}(G, S)$  bzw. dass  $(G, d_S) \sim_{\text{q.i.}} \overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$  gilt.  $\square$

*Beweis von Theorem 3.3.9. Zu 1.:* Wir zeigen zunächst, dass die Gruppe  $G$  endlich erzeugt ist. Sei dazu  $x_0 \in X$  ein beliebig gewählter Basispunkt in  $X$ . Sei  $R > 0$ , sodass

$$X = \bigcup_{g \in G} g \cdot B_R(x_0).$$

Sei  $B := B_R(x_0)$ . Wir setzen nun

$$S := \{g \in G \mid g \cdot B_R(x_0) \cap B_R(x_0) \neq \emptyset\}.$$

Da  $G$  auf  $X$  eigentlich diskontinuierlich wirkt, ist  $S$  endlich.

Wir wollen jetzt zeigen, dass  $S$  ein Erzeugendensystem für  $G$  ist. Beobachte zunächst, dass  $B$  kompakt ist und somit die Konstante

$$c := \inf\{d(B, g \cdot B) \mid g \in G \setminus S\} = \inf\{d(x, gy) \mid x, y \in B, g \in G \setminus S\}$$

wohldefiniert und echt größer 0 ist. Denn: Sei  $D$  die Distanz zwischen  $B$  und  $g \cdot B$ , siehe Abbildung 3.2. Es gibt höchstens endlich viele  $g' \cdot B$  mit Abstand  $\leq D$  zu  $B$ . Das impliziert wiederum, dass  $c$  eigentlich ein Minimum über endlich viele  $g \in G \setminus S$  ist.

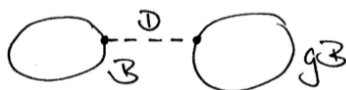


Abbildung 3.2: Abstand  $D$  zwischen  $G$  und  $g \cdot B$ .

Wähle jetzt ein  $g \in G \setminus S$ . Wir wollen  $g$  mithilfe der  $s \in S$  ausdrücken. Es gilt:

$$d(x_0, g \cdot x_0) \geq 2R + c \geq R + c.$$

Betrachte dazu Abbildung 3.3.

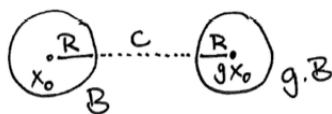


Abbildung 3.3: Abstand zwischen Mittelpunkten der Bälle, mit kleinstmöglichem Abstand  $c$ .

Es existiert also ein  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , sodass gilt:

$$R + (k - 1) \cdot c \leq d(x_0, g x_0) < R + k \cdot c.$$

Sei nun  $\gamma$  eine Geodätische von  $x_0$  nach  $g x_0$ . Wähle Punkte  $x_i$  auf  $\gamma$ , sodass  $x_{k+1} = g x_0$  ist und sodass  $d(x_0, x_1) \leq R$  und  $d(x_i, x_{i+1}) < c$  für alle  $i = 1, \dots, k$  gilt (siehe

Abbildung 3.4). Nach Definition von  $c$  gibt es dann  $g_i \in G$  mit  $g_0 = \mathbb{1}$ ,  $g_k = g$ , sodass  $x_{i+1} \in g_i B$ , da außerdem  $X = \bigcup_{g \in G} gB$  gilt. Siehe dazu Abbildung 3.5.

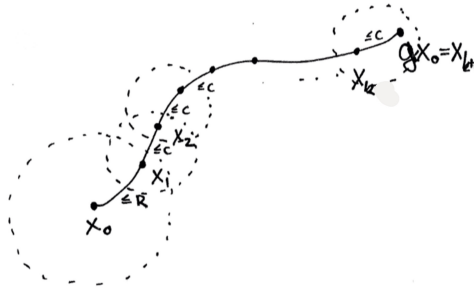


Abbildung 3.4: Unterteilung der Geodätische  $\gamma$  in hinreichend kleine Abschnitte.

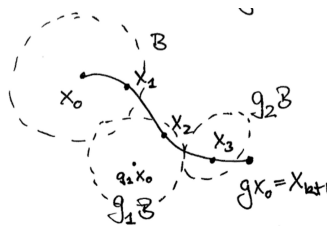


Abbildung 3.5: Mögliches Szenario für Elemente  $g_{i+1}$  mit  $x_i \in g_i B$ .

Damit für  $i = 1$  jetzt  $x_1 \in g_0 \cdot B = B$  ist, muss also  $d(x_0, x_1) \leq R$  sein. Setze  $s_i := g_{i-1}^{-1} \cdot g_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Dann ist

$$d(B, s_i B) = d(g_{i-1} B, g_i B) \leq d(x_i, x_{i+1}) < c.$$

Es folgt  $s_i \in S$ .

Nun gilt allerdings:

$$s_1 s_2 \cdots s_k = (g_0^{-1} \underbrace{g_1}_{=\mathbb{1}}) (g_1^{-1} g_2) \cdots (g_{k-1}^{-1} g_k) = g_k = g,$$

da  $g_0 = \mathbb{1}$ . Somit ist  $g$  durch  $S$  darstellbar. Es folgt Aussage (1),  $G$  ist endlich erzeugt.

Zu 2.: Als nächstes wollen wir zeigen, dass  $(G, d_S)$  quasi-isometrisch zu  $X$  ist. Wir definieren die *Bahn-Abbildung*

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow X \\ g &\mapsto g.x_0 \end{aligned}$$

für ein festes  $x_0 \in X$ .

Nach Konstruktion hat diese Abbildung  $f$  ein quasi-dichtes Bild in  $X$  (jeder Punkt in  $X$  hat höchstens Abstand  $R$  zu einem  $g x_0$ ).

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $f$  eine quasi-isometrische Einbettung ist. Das heißt, wir müssen  $K \geq 1$  und  $C \geq 0$  finden, sodass für alle  $g, h \in G$  gilt:

$$\frac{1}{K}d_S(g, h) - C \leq d(gx_0, hx_0) \leq Kd_S(g, h) + C. \quad (3.3.1)$$

Wir können uns aus folgendem Grund auf den Fall  $g = \mathbb{1}$  beschränken: Es gilt  $d(gx_0, hx_0) = d(x_0, (g^{-1}hx_0))$ , da die Gruppe durch Isometrien wirkt. Ferner gilt  $d_S(g, h) = d_S(\mathbb{1}, g^{-1}h)$ , da die Wortmetrik links-invariant ist.

Sei also  $h \in G$  beliebig und setze

$$L := \max\{d(x_0, sx_0) \mid s \in S\}.$$

Sei  $K := \max\{\frac{1}{c}, L, 2R\}$  und  $C := \max\{\frac{1}{K}, c\}$ . Wir werden im Laufe der Rechnung sehen, warum das die richtige Wahl für  $K$  und  $C$  ist.

Fall 1: Sei  $h = \mathbb{1}$ . Dann ist  $d(x_0, hx_0) = d_S(\mathbb{1}, h)$  und die Ungleichung 3.3.1 ist erfüllt.

Fall 2: Sei  $h = s$  für  $s \in S$ . Nach der Definition von  $S$  ist dann  $d(x_0, sx_0) \leq 2R$ . Weiter ist  $d_S(\mathbb{1}, s) = 1$  und nach Definition oben  $k \geq 2R, C \geq \frac{1}{K}$ . Somit haben wir

$$\frac{1}{K}d_S(\mathbb{1}, s) - C = \frac{1}{K} - C \leq 0 \leq d(x_0, sx_0) \cdots \leq 2R \leq K \leq K \cdot \underbrace{d_S(\mathbb{1}, s)}_{=1} + \underbrace{C}_{\geq 0},$$

also gilt Ungleichung 3.3.1.

Fall 3: Sei jetzt  $h \in G \setminus S$ . Aus dem Beweis von (1) wissen wir, dass  $d_S(\mathbb{1}, h) \leq k$  ist, wobei  $k$  hier so gewählt ist, dass  $R + (k - 1) \cdot c \leq d(x_0, hx_0)$  gilt. Daraus folgt

$$R + (d_S(\mathbb{1}, h) - 1) \cdot c \leq d(x_0, hx_0)$$

und schließlich

$$c \cdot d_S(\mathbb{1}, h) - c \leq d(x_0, hx_0) - R \stackrel{R \geq 0}{\leq} d(x_0, hx_0).$$

Gilt  $d(x_0, hx_0) \leq L \cdot d_S(\mathbb{1}, h)$ , so haben wir insgesamt, dass

$$c \cdot d_S(\mathbb{1}, h) - c \leq d(x_0, hx_0) \leq L \cdot d_S(\mathbb{1}, h).$$

Da  $K \geq L$  und  $K \geq \frac{1}{c}$  und  $C \geq c$  ist somit die Ungleichung 3.3.1. Es bleibt also nur die Behauptung  $d(x_0, hx_0) \leq L \cdot d_S(\mathbb{1}, h)$  zu zeigen. Wir schreiben  $h = s_1 \cdots s_k$  (minimal) mit  $s_i \in S$  für alle  $i = 1, \dots, k$ . Damit gilt nach iterativer Anwendung der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(x_0, hx_0) &= d(x_0, s_1 \cdots s_k x_0) \\ &\leq d(x_0, s_1 x_0) + d(s_1 x_0, s_1 \cdots s_k x_0) \\ &\leq d(x_0, s_1 x_0) + d(s_1 x_0, s_1 s_2 x_0) + \cdots + d(s_1 \cdots s_{k-1} x_0, s_1 \cdots s_k x_0) \\ &= d(x_0, s_1 x_0) + d(x_0, s_2 x_0) + \cdots + d(x_0, s_k x_0) \\ &\leq L \cdot k = L \cdot d_S(\mathbb{1}, h). \end{aligned}$$

Somit gilt (2) und wir sind fertig.  $\square$

**Bemerkung 3.3.11.** Milnor-Švarc liefert nur eine quasi-Isometrie, keine Bilipschitz-Äquivalenz.

**Bemerkung 3.3.12.** Die Voraussetzungen des Milnor-Švarc Lemmas lassen sich wie folgt abschwächen:

Es sei die Wirkung  $G \curvearrowright X$  durch Isometrien auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  gegeben. Sei weiter  $X$   $(C, D)$ -quasi-geodätisch, das heißt für alle  $x, y \in X$  existiert eine  $(C, D)$ -quasi-Geodäte von  $x$  nach  $y$ , also eine  $(C, D)$ -quasi-isometrische Abbildung (Einbettung)  $\gamma : [0, l] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(l) = y$ . Außerdem existiere eine Teilmenge  $B \subseteq X$  mit  $\text{diam}(B) < \infty$  und

$$X = \bigcup_{g \in G} g.B,$$

sodass zusätzlich für  $B' := B_{2D}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B \text{ mit } d(x, y) \leq 2D\}$  gilt, dass

$$S := \{g \in G \mid gB' \cap B' \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Dann ist  $G$  von  $S$  erzeugt und quasi-isometrisch zu  $X$ .

**Beispiel 3.3.13.** Wir verwenden die Notation von Bemerkung 3.3.12. Sei  $X = \mathbb{R}^2$  mit der euklidischen Metrik. Der Raum  $X$  ist geodätisch und alle geodätischen Räume sind quasi-geodätisch mit  $C = 1$  und  $D = 0$ . Nun wirke  $G := \mathbb{Z}^2 \curvearrowright X$  durch Translationen, das heißt

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow X \\ \left( \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} x + n \\ y + k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setze  $B := [0, 1] \times [0, 1]$ . Dann ist  $S = \{ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \mid \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.B' \cap B' \neq \emptyset \}$  ein Erzeugendensystem (aber nicht minimal). Hier ist  $D = 0$  also ist  $B' = B_{2D}(B) = B$ . Das impliziert

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Menge  $S.B$  ist in Abbildung 3.6 lila dargestellt.

Man könnte äquivalent dazu auch  $x_0$  als Mittelpunkt des dunklen Kästchens (bei  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ) wählen und  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und dann  $S$  wählen wie im Beweis von Theorem 3.3.9.

Wir wollen uns jetzt einige direkte Folgerungen aus dem Milnor-Švarc Lemma 3.3.9 anschauen. Abkürzend schreiben wir:

**Definition 3.3.14** (Geometrische Wirkung). Eine *geometrisch* Wirkung  $G \curvearrowright X$  ist eine eigentlich diskontinuierliche, kobeschränkte Wirkung durch Isometrien.

Geometrische Wirkungen sind genau die, auf die wir den Satz von Milnor-Švarc anwenden können!

**Beispiel 3.3.15** (Geometrische Wirkungen). Die Folgenden Gruppenwirkungen sind Beispiele geometrischer Wirkungen:

1. Die Translationswirkung von  $\mathbb{Z}^2$  auf  $\mathbb{R}^2$  ist geometrisch. Siehe dazu Abbildung 3.6.
2. Die Spiegelungsgruppe  $W$  in  $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ , die durch Spiegelungen am Aufspann der drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks erzeugt wird ist geometrisch. Sie entspricht der Coxetergruppe  $W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid (s_i s_j)^3 \text{ für alle } i, j \rangle$ .
3. Die Linkstranslationswirkung einer von  $S$  endlich erzeugten Gruppe  $G$  auf jedem ihrer Cayleygraphen  $\text{Cay}(G, S)$  oder  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$  ist ebenfalls eine geometrische Wirkung.

Wir können den Satz von Milnor-Švarc auf diese Beispiele anwenden und erhalten die quasi-Isometrien  $\mathbb{Z}^2 \sim_{\text{q.i.}} \mathbb{R}^2$  und  $W \sim_{\text{q.i.}} \mathbb{R}^2$ . Aus dem 3. Beispiel ergibt sich, dass die freie Gruppe  $F_k$  mit  $k$  Erzeugern quasi-isometrisch zu einem  $2k$ -regulären Baum ist.

Beispiel einer nicht-geometrischen Wirkung ist die Rotationswirkung von  $SO(2)$  auf  $\mathbb{R}^2$ . Diese Wirkung ist nicht eigentlich diskontinuierlich.

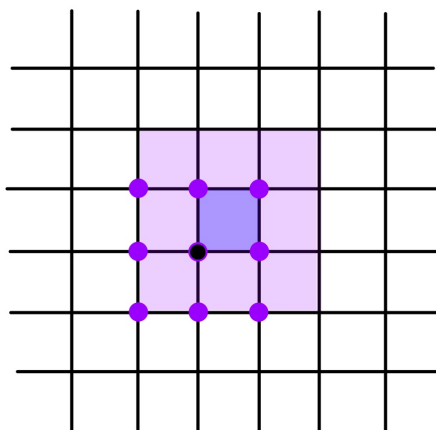


Abbildung 3.6: Translationswirkung von  $\mathbb{Z}^2$  auf  $\mathbb{R}^2$ , mit markiertem Bereich  $S.B$ . Dabei ist  $S$  durch lila Punkte markiert, der Ursprung  $(0,0) \in S$  durch den schwarzen Punkt und  $B' = B = [0,1] \times [0,1] \subset B.S$  durch die etwas dunklere Fläche.

Wir betrachten nun eine topologische Variante des Milnor-Švarc Lemmas. Dazu benötigen wir folgendes Lemma, dessen Beweis wir als Übungsaufgabe stellen. Siehe Übungsaufgabe 6.3.4.

**Lemma 3.3.16** (Metrik für Quotientenräume). Sei  $(X, d)$  ein eigentlicher metrischer Raum. Sei  $\alpha : G \rightarrow \text{Iso}(X)$  eine Wirkung von  $G$  auf  $X$ . Sei weiter  $p : X \rightarrow G \backslash X$  die natürliche Projektion auf den Quotienten. Setze

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) := \inf\{d(x, y) \mid p(x) = \bar{x} \text{ und } p(y) = \bar{y}\}$$

für  $\bar{x}, \bar{y} \in G \backslash X$ . Dann gilt:

1. Das Infimum ist ein Minimum: Es existieren  $x, y \in X$  mit  $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y)$ , sodass  $p(x) = \bar{x}$  und  $p(y) = \bar{y}$  gilt.
2. Die Abbildung  $\bar{d}$  ist eine Metrik auf  $G \backslash X$ .

**Definition 3.3.17** (kokompakte Wirkung). Eine Wirkung  $G \curvearrowright X$  auf einem topologischen Raum  $X$  heißt *kompakt*, wenn der Quotient der Wirkung  $G \backslash X$  kompakt ist bezüglich der Quotiententopologie.

**Beispiel 3.3.18** (kokompakte Wirkungen). Wir betrachten einige (Nicht-)Beispiele kompakter Wirkungen.

1. Sei  $X$  kompakt und wegzusammenhängend sowie  $\tilde{X}$  die universelle Überlagerung von  $X$ . Dann ist die Gruppenwirkung  $\pi_1(X) \curvearrowright \tilde{X}$  durch Decktransformationen eine kompakte (und eigentliche) Wirkung. Es ist  $\pi_1(X) \backslash \tilde{X} \cong X$ .
2. Die Wirkung  $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2$  durch Translation längs der  $x$ -Achse ist nicht kompakt. Der Quotientenraum entspricht einem unendlichen Zylinder und ist nicht kompakt. Siehe dazu links in Abbildung 3.7.
3. Die Wirkung  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$  durch Translation längs der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse ist kompakt. Der Quotientenraum  $\mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$  ist ein flacher Torus. Siehe dazu Mitte der Abbildung 3.7.
4. Die Wirkung  $G \curvearrowright \text{Cay}(G, S) =: \Gamma$  ist kompakt. Der Quotientenraum  $G \backslash \Gamma$  ist eine Rose mit  $n = |S|$  Blättern. Siehe dazu rechts in Abbildung 3.7.

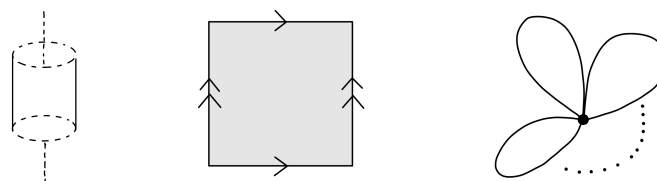


Abbildung 3.7: Beispiele für Quotientenräume. Vergleiche Beispiel 3.3.18.

Es gilt folgender Satz, der sich aus der bereits bewiesenen Variante und den gerade eingeführten Definitionen ableiten lässt.

**Theorem 3.3.19** (Topologischer Milnor-Švarc). *Eine Gruppe  $G$  wirke eigentlich diskontinuierlich, kokompakt und durch Isometrien auf einem eigentlichen, geodätischen metrischen Raum  $X$ . Dann ist  $G$  endlich erzeugt und die Abbildung*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g.x_0 \end{aligned}$$

*ist für alle  $x_0 \in X$  eine quasi-Isometrie.*

*Beweis.* Siehe Übungsaufgabe 6.3.5. □

Wir sehen nun erste direkte Anwendungen dieses Satzes.

**Korollar 3.3.20.** *Sei  $G$  endlich erzeugt und sei  $H \leq G$  eine Untergruppe mit  $[G : H] < \infty$ . Dann ist  $H$  endlich erzeugt und  $G \sim_{q.i.} H$ .*

*Beweis.* Sei  $S$  ein endliches Erzeugendensystem von  $G$ . Dann wirkt  $H \curvearrowright \text{Cay}(G, S)$  isometrisch durch Linksmultiplikation. Diese Wirkung erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 3.3.9: Die Wirkung ist eigentlich diskontinuierlich, da  $G$  bereits so wirkt. Der Index von  $H$  in  $G$  ist endlich, also gibt es ein endliches Vertretersystem  $B$  von  $H \backslash G$ , das insbesondere beschränkt ist. Also ist  $H \curvearrowright \text{Cay}(G, S)$  kobeschränkt. Darüber hinaus ist  $\text{Cay}(G, S)$  geodätisch. Mit Theorem 3.3.9 gilt also  $H \sim_{q.i.} \text{Cay}(G, S)$  und es gilt  $\text{Cay}(G, S) \sim_{q.i.} G$ . Somit folgt  $H \sim_{q.i.} G$ . □

**Korollar 3.3.21.** *Sei die Gruppe  $G$  endlich erzeugt und  $N$  eine endliche normale Untergruppe von  $G$ . Dann ist  $G/N \sim_{q.i.} G$ .*

*Beweis.* Siehe Übungsaufgabe 6.3.6. □

**Bemerkung 3.3.22.** Korollar 3.3.20 und 3.3.21 besagen, dass endliche Gruppen den quasi-Isometrie-Typ einer Gruppe nicht beeinflussen. Wir sagen auch „ $G$  unterscheidet sich von  $G'$  durch eine endliche Gruppe“, wenn entweder  $G$  isomorph zu einer Untergruppen von  $G'$  von endlichem Index ist oder umgekehrt. In diesem Zusammenhang bedeuten Korollar 3.3.20 und Korollar 3.3.21: Unterscheiden sich  $G$  und  $G'$  um eine endliche Gruppe, so ist  $G \sim_{q.i.} G'$ .

**Beispiel 3.3.23.** Hier ein paar Beispiele für quasi-Isometrien:

1. Jede endliche Gruppe ist *quasi-isometrisch* zur trivialen Gruppe.  
Diese Behauptung folgt mit der Beobachtung, dass Räume mit endlichem Durchmesser zum Ein-Punkt-Raum isometrisch sind.

2. Die Gruppe  $D_\infty$  ist quasi-isometrisch zu  $\mathbb{Z}$ .

Weil  $D_\infty$  eine Untergruppe von Index 2 hat, die zu  $\mathbb{Z}$  isomorph ist, folgt die Behauptung mit Korollar 3.3.20. Alternativ betrachte die Gruppenwirkung  $D_\infty \curvearrowright \mathbb{R}$ , die durch Spiegelungen am Ursprung und am Punkt 1 erzeugt wird. Diese Wirkung ist kokompakt, eigentlich diskontinuierlich und via Isometrien. Milnor-Švarc liefert dann die Behauptung.

3. Für alle  $k \geq 2$  ist  $F_k$  quasi-isometrisch zu  $F_2$ .

Um das einzusehen konstruiere die explizite quasi-Isometrie der zugehörigen Cayleygraphen zu freien Erzeugendensystemen, d.h. zwischen den regulären Bäumen  $T_{2k}$  mit je  $2k$  Kanten an jeder Ecken und dem Cayleygraphen  $T_4$  der freien Gruppe mit zwei Erzeugern. Oder betrachte die endliche Überlagerung von einer Rose  $R_k$  mit  $k$  Blättern auf eine Rose  $R_2$  mit 2 Blättern. Dann gilt, dass  $\pi_1(R_k) = F_k$  ist eine Untergruppe von  $\pi_1(R_2) = F_2$  ist, gegeben durch die von der Überlagerung induzierte Einbettung.

## 3.4 Quasi-Isometrie-Invarianten

Nachdem wir im letzten Abschnitt die quasi-Isometrie kennengelernt haben, wollen wir uns in diesem Abschnitt Eigenschaften quasi-isometrischer Gruppen und Räume widmen. Es stellt sich zunächst die Frage, welche Eigenschaften zwei (endlich erzeugte) quasi-isometrische Gruppen gemeinsam haben bzw. welche Eigenschaften unter einer quasi-Isometrie übertragen werden. Das führt uns zum Begriff der q.i.-Invariante.

**Definition 3.4.1** (q.i.-Invariante). Sei  $V$  eine Menge von Objekten einer Kategorie. Eine *q.i.-Invariante* mit Werten in  $V$  ist eine Abbildung

$$I : \{\text{endlich erzeugte Gruppen}\} \rightarrow V,$$

sodass  $I(G) = I(H)$  für alle endlich erzeugten Gruppen  $G, H$  mit  $G \sim_{\text{q.i.}} H$ .

Solche Invarianten sind hilfreich, um zu zeigen, dass zwei Gruppen nicht quasi-isometrisch sind. Im Allgemeinen sind sie jedoch wenig hilfreich, um zu zeigen, dass zwei Gruppen tatsächlich quasi-isometrisch sind. Im Allgemeinen impliziert  $I(G) = I(H)$  nämlich **nicht**, dass  $G \sim_{\text{q.i.}} H$  gilt.

**Beispiel 3.4.2** (Eine erste q.i.-Invariante). Wir betrachten hier erste elementare Beispiele für q.i.-Invarianten. Sei  $V = \{0, 1\}$ . Dann ist die Abbildung

$$I(G) = \begin{cases} 0 & G \text{ endlich} \\ 1 & G \text{ unendlich} \end{cases}$$

eine QI-Invariante.



Es gibt kaum Invarianten, die auf der ganzen Familie endlich erzeugter Gruppen definierbar sind. Daher schränkt man sich oft auf eine (leicht definierbare) Teilklasse von Gruppen ein. So auch im nächsten Beispiel in dem wir auch ein nicht-Beispiel betrachten.

**Beispiel 3.4.3** (nicht-Beispiel einer q.i.-Invariante für freie Gruppen). Sei  $V = \mathbb{N}$  und auf der Menge aller endlich erzeugten, freien Gruppen sei die Abbildung  $I(F) = \text{rang}(F)$  definiert. Dann ist  $I$  **keine** QI-Invariante.

Manchmal ist folgende Formulierung für q.i.-Invarianten leichter zu greifen:

**Definition 3.4.4** (Geometrische Eigenschaft). Eine Eigenschaft  $P$  von endlich erzeugten Gruppen heißt *geometrisch*, wenn gilt: Für eine Gruppe  $G$  mit der Eigenschaft  $P$  und eine Gruppe  $H$  mit  $G \sim_{\text{q.i.}} H$  folgt immer, dass auch  $H$  die Eigenschaft  $P$  erfüllt.

*Bemerkung 3.4.5.* Die Begriffe einer q.i.-Invariante und einer geometrischen Eigenschaft entsprechen einander. Für eine geometrische Eigenschaft  $P$ , wähle  $V := \{0, 1\}$  und definiere

$$I(G) := \begin{cases} 0 & G \text{ hat Eigenschaft } P \\ 1 & G \text{ hat } P \text{ nicht.} \end{cases}$$

Dann ist  $I$  eine q.i.-Invariante.

Für eine q.i.-Invariante  $I$  sage, dass eine endlich erzeugte Gruppe  $G$  genau dann die Eigenschaft  $P_v$  erfüllt, wenn  $I(G) = v \in V$  gilt. Dann ist  $P$  eine geometrische Eigenschaft.

Daher sagt man manchmal, dass eine Eigenschaft  $P$  invariant unter quasi-Isometrien oder eine q.i.-Invariante ist, wenn sie geometrisch ist.

**Beispiel 3.4.6.** Für einige Eigenschaften wissen wir bereits, dass sie geometrisch sind.

1. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist die Eigenschaft, virtuell (insb. isomorph zu)  $\mathbb{Z}^n$  zu sein, eine geometrische Eigenschaft.
2. Endlich zu sein ist geometrisch.
3. Abelsch zu sein ist nicht geometrisch. Es gibt zum Beispiel sowohl endliche Gruppen die abelsch sind als auch solche die nicht abelsch sind. Der Beweis für unendliche Gruppen ist sehr schwer.
4. (Virtuell) frei und endlich erzeugt zu sein ist geometrisch.
5. Weitere geometrische Eigenschaften: Hyperbolizität, (manche) Ränder von Gruppen, Enden, Gruppenwachstum.

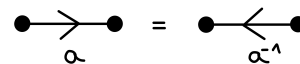
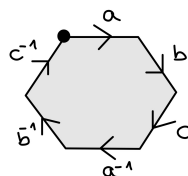
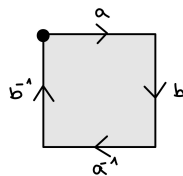
Unser nächstes Ziel ist es zu beweisen, dass auch endlich präsentiert zu sein geometrisch ist. Dazu brauchen wir einen Raum, auf dem die Gruppen wirken und der uns die endliche Präsentierung auch kodiert.

**Definition 3.4.7** (Cayley-2-Komplex). Sei  $G$  endlich präsentiert, das heißt  $G = \langle S \mid R \rangle$  mit  $S$  und  $R$  endlich.

Konstruiere den *Cayley-2-Komplex*  $\tilde{\mathcal{K}}(S, R) =: \tilde{\mathcal{K}}$  wie folgt:

1. Für alle Relationen  $r \in R$  mit  $l(r) = n$  betrachte ein reguläres  $n$ -gon (Kantenlänge 1) mit ausgezeichnete Startecke und gerichteten, beschrifteten Kanten, die dem Wort  $r$  entsprechen, wenn man sie im Uhrzeigersinn abliest. Hierbei entspricht die Inversenbildung der Umkehrung der Orientierung einer Kante. Dazu betrachte Abbildung 3.8b. Für Beispielpolygone betrachte Abbildung 3.8a.
2. Betrachte den gerichteten(!) Cayleygraphen  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$  und klebe an jede Ecke, an der ein gerichteter, mit  $r$  beschrifteter Zykel startet, eine der oben beschriebenen Zellen an.

An jeder Ecke (also für jedes  $g \in G$ ) wird eine Zelle pro Wort  $r \in R$  eingeklebt!



(a) Zellen für die Relationen  $aba^{-1}b^{-1}$  und  $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$  mit ausgezeichnete Startecke.

(b) Inverse Elemente entsprechen umgekehrter Orientierung.

Abbildung 3.8: Zur Konstruktion des Cayley-2-Komplexes.

**Beispiel 3.4.8.** Wir betrachten den Cayley-2-Komplex für erste Gruppen.

1. Sei  $G = \mathbb{Z}^2 = \langle S \mid R \rangle$  mit Erzeugern  $S := \{a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$  und Relationen  $R = \{r = aba^{-1}b^{-1}\}$ . Dann entspricht  $\tilde{\mathcal{K}}(G, R)$  der Parkettierung der Ebene mit Quadraten. Siehe Abbildung 3.9.

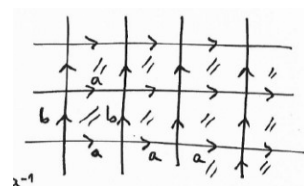
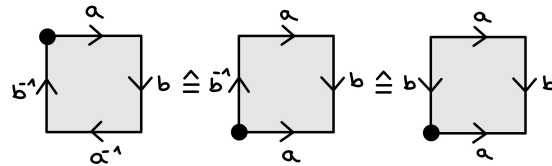


Abbildung 3.9: Der Cayley-2-Komplex von  $\mathbb{Z}^2$ .

Der Cayleygraph formt ein Gitternetz und jede der Zellen hat die Form eines Quadrats. Die Beschriftung der Kanten und die Wahl der Startecke ist dabei nicht

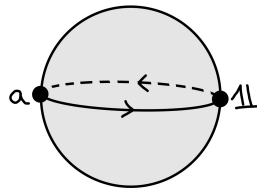
eindeutig. Vergleiche hierzu Abbildung 3.10. Dort sieht man welche Quadrate einander entsprechen, wenn wir die definierende Relation abändern (was dann einer Änderung der Startecke entspricht).



Abbildungung 3.10: Zellen des Cayley-2-Komplexes von  $\mathbb{Z}^2$ , für die Relation  $aba^{-1}b^{-1}$ .

2. Sei  $G = \langle S \mid R \rangle$  mit  $S = \{a\}$  und  $R = \{a^2\}$ . Der orientierte Cayleygraph besteht aus zwei Ecken und zwei entgegengesetzt orientierten Kanten zwischen ihnen.

Nun wird eine Zelle in Form eines 2-gons, bzw. in der Form einer  $D^2$  zwei Mal angeklebt. Einmal an der Ecke  $1$  und einmal an der Ecke  $a$ . Der Cayley-2-Komplex  $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{K}}(S, R) \simeq \mathbb{S}^2$  ist dann topologisch eine 2-Sphäre. Siehe dazu Abbildung 3.11. Hier ist  $G = \pi_1(\mathbb{R}P^2)$  und  $\tilde{\mathcal{K}}$  ist die universelle Überlagerung von  $\mathbb{R}P^2$ .



Abbildungung 3.11: Der Cayley-2-Komplex von  $\langle a \mid a^2 \rangle$ , isomorph zu  $\mathbb{S}^2$ .

**Definition 3.4.9** (Präsentationskomplex  $\mathcal{K} := \mathcal{K}(S, R)$ ). Sei  $G = \langle S \mid R \rangle$  eine endlich präsentierte Gruppe. Definiere einen Raum (CW-Komplex)  $\mathcal{K} := \mathcal{K}(S, R)$  wie folgt:

1. Der Raum  $\mathcal{K}$  enthält eine Ecke  $v$  (0-Zelle).
2. Für alle  $s \in S$  klebe eine orientierte und mit  $s$  beschriftete Kante  $e_s$  der Länge 1 mit beiden Enden an  $v$  (1-Zellen).
3. Für jedes Wort  $r = s_1 \cdots s_{l(r)} \in R$  klebe eine Zelle  $D_r$  (ein  $l(r)$ -gon mit beschrifteten Kanten wie in Definition 3.4.7) an die Kanten beschriftungs- und orientierungserhaltend an (2-Zellen).

Klebe eine Kante  $s_i$  an die Kante  $e_s$  orientierungserhaltend an, wenn  $s_i \in S$  gilt und orientierungsumkehrend, wenn  $s_i^{-1} \in S$  und  $s_i \notin S$  gilt.

**Beispiel 3.4.10.** Wir betrachten einige Beispiele für Cayley-2-Komplexe und Präsentationskomplexe:

1. Sei  $G = \mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ . Dann wird  $\mathcal{K}$  wie in Abbildung 3.12 gebaut.

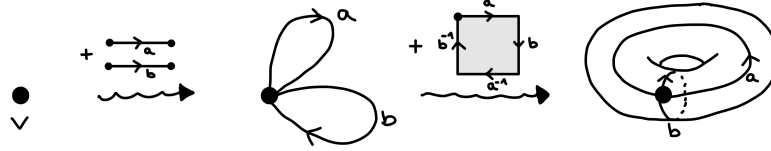


Abbildung 3.12: Bauplan für den Präsentationskomplex von  $G = \mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ , durch ankleben von zwei Kanten  $e_a$  und  $e_b$  sowie einer 2-Zelle an eine Ecke  $v$ .

2. Für die freie Gruppe  $F_S$  mit Erzeugendensystem  $S$  gilt  $\tilde{\mathcal{K}}(F_S, S) = \overrightarrow{\text{Cay}}(F_S, S)$  und  $\mathcal{K}$  ist eine Rose mit  $\#S$  Blättern.
3. Es gilt  $\mathcal{K}(\{a\}, \{a^2\}) \cong \mathbb{RP}^2$ , vergleiche Abbildung 3.13.

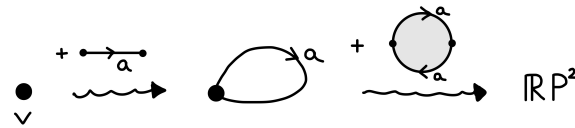


Abbildung 3.13: Bauplan für den Präsentationskomplex von  $\langle a \mid a^2 \rangle$

**Lemma 3.4.11** (Zusammenhang von  $\tilde{\mathcal{K}}$  und  $\mathcal{K}$ ). Sei  $G = \langle S \mid R \rangle$  eine endlich präsentierte Gruppe. Dann gilt:

1. Der Präsentationskomplex  $\mathcal{K}$  ist Quotient des Cayley-2-Komplexes  $\tilde{\mathcal{K}}$ , modulo der natürlichen  $G$ -Linkstranslationswirkung auf  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Das heißt, es gilt:

$$\mathcal{K} = G \backslash \tilde{\mathcal{K}}.$$

2. Für jeden anderen Raum  $X$  mit einer lokal isometrischen Abbildung  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{K}$  existiert eine lokale Isometrie  $\psi : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow X$ , sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{K}} & & \\ \downarrow pr & \searrow \psi & \\ \mathcal{K} & \xleftarrow{\varphi} & X \end{array}$$

*Beweis.* Siehe Übungsaufgabe 6.3.8. □

Der Cayley-2-Komplex  $\tilde{\mathcal{K}}$  ist also die universelle Überlagerung des Präsentationskomplexes  $\mathcal{K}$  und es gilt  $\pi_1(\mathcal{K}) = G$  mit Satz von Seifert und van Kampen.

**Lemma 3.4.12.** *Sei  $G$  von  $S$  endlich erzeugt und sei  $\pi : F(S) \rightarrow G$  die natürliche Projektion. Sei  $R \subseteq \text{Ker}(\pi)$ . Sei  $X$  der Komplex, den man durch Ankleben von 2-Zellen  $D_r$  wie in Definition 3.4.7 aus  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$  und  $r \in R$  enthält. Dann gilt:  $X$  ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn  $\langle R \rangle_G^\triangleleft = \text{Ker}(\pi)$ .*

*Beweisskizze.* (siehe auch [BH99, S. 135]).

Der Cayleygraph  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$  ist isomorph zum Quotienten

$$\text{Ker}(\pi) \backslash \overrightarrow{\text{Cay}}(F(S), S),$$

wobei  $\overrightarrow{\text{Cay}}(F(S), S)$  ein Baum ist. Es folgt  $\pi_1(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)) \cong N := \text{Ker}(\pi)$  und ein Wort in  $S \cup S^{-1}$  ist in  $N$  genau dann, wenn es der Beschriftung eines Zyklus in  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$  entspricht, der in  $1$  beginnt und endet.

Sei  $u \in F(S)$  ein reduziertes Wort und  $v_u$  eine Ecke in  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$ , in der der eindeutige Pfad mit Label  $u$  endet, der in  $1$  startet.

Klebe startend in  $v_u$  eine Scheibe (ein  $n$ -gon) an, deren Randkanten mit  $r$  beschriftet sind. Dann gilt:

$$\pi_1(\text{resultierender 2-Komplex}) = N / \langle u^{-1}ru \rangle.$$

Allgemein gilt für den Komplex  $X$ , also  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$ , verklebt mit 2-Zellen  $D_r$  für alle  $r \in R$  an allen  $u \in G$ , mit Seifert van Kampen:

$$\pi_1(X) = N / \langle R \rangle_G^\triangleleft.$$

Insbesondere ist der Komplex  $X$  einfach zusammenhängend genau dann, wenn  $\langle R \rangle_G^\triangleleft = N$  gilt. □

**Theorem 3.4.13** (Endlich präsentiert zu sein ist geometrisch). *Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem  $S$  und Relationen  $R$ , sodass auch  $|R| < \infty$  gilt. Sei  $H$  von  $S'$  endlich erzeugt und  $H \sim_{q.i.} G$ . Dann ist  $H$  endlich präsentiert und es existiert eine endliche Menge an Relationen  $R'$ , sodass  $H \cong \langle S' \mid R' \rangle$ .*

*Beweis.* Setze  $G_1 := G$ ,  $G_2 := H$ ,  $S_1 := S$ ,  $S_2 := S'$  und  $\Gamma_i := \overrightarrow{\text{Cay}}(G_i, S_i)$ . Sei  $\rho$  die Länge des längsten Wortes in  $R$ . Wir wissen, dass der Cayley-2-Komplex  $\tilde{\mathcal{K}}_1$  von  $G_1$  einfach zusammenhängend ist.

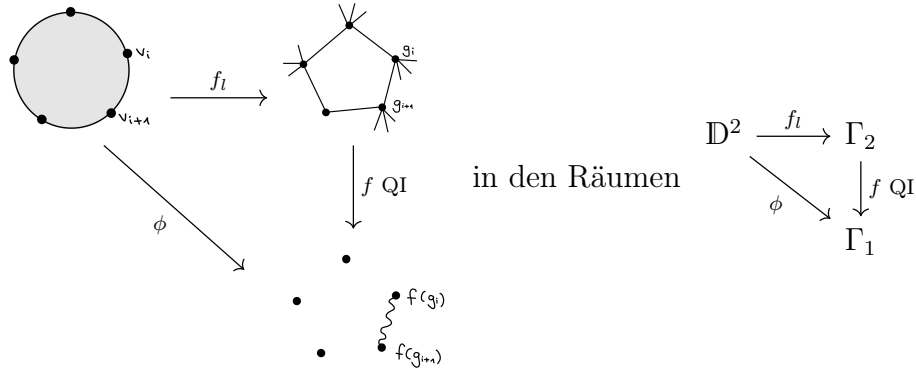


Abbildung 3.14: Relation zwischen  $f_l$ ,  $f$  und  $\phi$ .

Es ist  $G_1 \sim_{\text{q.i.}} G_2$  und somit existieren  $(C, D)$ -quasi-Isometrien  $f$  und  $f'$  mit

$$\Gamma_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xrightarrow{f'} \end{array} \Gamma_2,$$

die für gewisse  $C, D$  quasi-invers sind.

Sei weiter  $\mu > 0$  so gewählt, dass  $d(f'(f(v)), v) \leq \mu$  für alle  $v \in \Gamma_2$  (möglich weil  $f, f'$  quasi-Inverse) gilt.

Setze  $m := \max\{\rho, \mu, C, D\}$  und  $M := 3 \cdot (3m^2 + 5m + 1)$ . Konstruiere einen 2-Komplex  $\mathcal{K}'_2$  aus  $\Gamma_2$  durch Ankleben einer 2-Zelle an jeden reduzierten (!) Kreis der Länge kleiner gleich  $m$  in  $\Gamma_2$ . Achtung: Der Komplex  $\mathcal{K}'_2$  ist kein Präsentationskomplex, da wir noch nicht wissen, dass  $G_2$  endlich präsentiert ist.

Sei jetzt  $l$  ein Kantenkreis in  $\Gamma_2$ , das heißt  $l = (g_1, \dots, g_n, g_1)$  mit  $g_i \in G_2$  für alle  $i$ . Betrachte die stetige Abbildung  $f_l : \partial\mathbb{D}^2 \rightarrow \Gamma_2$ , wobei  $\mathbb{D}^2$  eine Kreisscheibe mit simplizialen Rand mit  $n$  Kanten und  $f_l(\partial\mathbb{D}^2) = l$  ist.

Mit Lemma 3.4.12 folgt dann, dass  $G_2$  endlich präsentiert ist, wenn wir zeigen können, dass  $f_l$  eine stetige Fortsetzung  $\hat{f}_l : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathcal{K}'_2$  besitzt, das heißt wenn  $\mathcal{K}'_2$  einfach zusammenhängend ist.

Um dies zu zeigen, seien  $v_i$  die Urbilder von  $g_i$  unter  $f_l$ . Sei nun  $\phi : \partial\mathbb{D}^2 \rightarrow \Gamma_1$  eine Abbildung, die  $v_i$  auf  $f(g_i) \in \Gamma_1$  und die Kante  $\{v_i, v_{i+1}\}$  auf eine Geodätische von  $f(g_i)$  nach  $f(g_{i+1})$  schickt (Indizes modulo  $n$ ). Weil  $\tilde{\mathcal{K}}_1$  einfach zusammenhängend ist, erweitert  $\phi$  stetig auf eine Abbildung  $\hat{\phi} : \mathbb{D}^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_1$ . Die Zusammenhänge werden in Abbildung 3.14 illustriert.

Wir werden jetzt mithilfe von  $\tilde{\mathcal{K}}_1$  die Scheibe  $\mathbb{D}^2$  triangulieren und damit eine Erweiterung  $\hat{f}_l$  von  $f_l$  definieren.

1. Schritt: Für alle  $x \in \mathbb{D}^2$  definiere Elemente  $h_x \in G_1 = V(\Gamma_1) = G$  wie folgt:

1. Ist  $\hat{\phi}(x)$  eine Ecke, so setze  $h_x = \hat{\phi}(x)$ . Insbesondere gilt  $h_{v_i} = f(g_i)$  für alle  $i$ .
2. Ist  $\hat{\phi}(x)$  in einer offenen Kante bzw. einer 2-Zelle enthalten, so wähle eine (belie-

bige) Ecke der Kante bzw. Zelle als  $h_x$ .

Da die Abbildung  $\hat{\phi}$  stetig ist, gilt dann  $d(h_x, h_y) \leq \rho$  für alle Punkte  $x, y$ , die nah genug sind in  $\mathbb{D}^2$ . Weiter ist  $d(\phi(x), h_x) \leq \frac{1}{2}$  für alle  $x \in \partial\mathbb{D}^2$  (weil Kanten in  $\partial\mathbb{D}^2$  alle Länge 1 haben).

2. Schritt: Trianguliere  $\mathbb{D}^2$  nun so, dass alle Ecken  $v_i$  in  $\partial\mathbb{D}^2$  Ecken der Triangulierung  $\mathcal{T}$  sind und so, dass für alle benachbarten Ecken  $t, t'$  von  $\mathcal{T}$  gilt:  $d(h_t, h_{t'}) \leq \rho$ .

3. Schritt: Setze  $\hat{f}_l|_{\partial\mathbb{D}^2} := f_l$  und  $\hat{f}_l(x) := f'(h_x)$  für alle  $x$  im Inneren von  $\mathbb{D}^2$ .

**Behauptung:** Für alle benachbarten Ecken  $t, t'$  der Triangulierung  $\mathcal{T}$  gilt

$$d_{\Gamma_2}(t, t') \leq \frac{M}{3}.$$

Ist die Behauptung wahr, so können wir  $\hat{f}_l$  stetig auf  $\mathbb{D}^2$  erweitern, indem wir Kanten von  $\mathcal{T}$  auf Geodäten in  $\Gamma_2$  schicken und einsehen, dass (nach Konstruktion) Kreise der Länge kleiner als  $M$  eine 2-Zelle in  $\mathcal{K}'_2$  beranden. Das impliziert, dass  $\hat{f}_l$  stetig auf die Dreiecke in  $\mathcal{T}$  von  $\mathbb{D}^2$  erweitert werden kann. Es ist also noch die Behauptung zu zeigen.

Es muss lediglich die Ecke  $t$  in  $\overset{\circ}{\mathbb{D}^2} := \mathbb{D}^2 \setminus \partial\mathbb{D}^2$  betrachtet werden und  $t' \in \partial\mathbb{D}^2$ .

Sei  $t'$  zwischen  $v_i$  und  $v_{i+1}$ . Dann gilt mit der Dreiecksungleichung und da  $f'$  eine  $(C, D)$ -quasi-Isometrie ist:

$$\begin{aligned} d(\hat{f}_l(t), \hat{f}_l(t')) &= d(f'(h_t), f_l(t')) \\ &\leq d(f'(h_t), f'(h_{t'})) \\ &\quad + d(f'(h_{t'}), f'(\phi(t'))) + d(f'(\phi(t')), f'(\phi(v_i))) \\ &\quad + d(f'(\phi(v_i)), f_l(v_i)) + d(f_l(v_i), f_l(t')) \\ &\leq (C \cdot \rho + D) + (C \cdot \frac{1}{2} + D) + [C \cdot d(\phi(v_i), \phi(v_{i+1})) + D] \\ &\quad + d(\underbrace{f'(f(g_i))}_{=\phi(v_i)}, g_i) + 1 \\ &\leq (C\rho + D) + (\frac{C}{2} + D) + (C \cdot (C + D) + D) + \mu + 1 \\ &\leq 3m^2 + 5m + 1 \leq \frac{M}{3}. \end{aligned}$$

□

Wir werden in den nächsten Wochen noch einige weitere Beispiele für QI-Invarianten kennen lernen:

- Hyperbolizität
- Ende von Räumen/Gruppen
- Gruppenwachstum