Geometrische Gruppentheorie

Prof. Dr. Petra Schwer

Universität Heidelberg, schwer@uni-heidelberg.de

Wintersemester 2025/26

Inhaltsverzeichnis

2 Freie Gruppen und Gruppenpräsentierungen

Jede Gruppe lässt sich als Quotient einer freien Gruppe auffassen. Der Kern der natürlichen Projektionsabbildung ist dann eine normale Untergruppe der freien Gruppe. In der geometrischen Gruppentheorie untersuchen wir oft Gruppen, deren Kerne als normale Hülle von endlich vielen definierenden Relationen, d.h. Wörtern in der freien Gruppe, auftauchen. Es gibt zahlreiche Klassen von Gruppen, die genau durch solche abstrakten Beschreibungen mit Erzeugern und Relationen definiert sind.
In diesem Kapitel werden wir freie Gruppen sowie die Darstellung von Gruppen durch Angabe von Erzeugern und Relationen kennen lernen.

2.1 Freie Gruppen

Dieses Kapitel führt in die Theorie der freien Gruppen ein. Zunächst werden freie Gruppen über einem Alphabet direkt konstruiert und dann ihre universelle Eigenschaft nachgewiesen.

Definition 2.1.1 (Freie Gruppe)**.** Eine Gruppe G heißt *frei*, wenn es ein Erzeugendensystem S in G gibt, sodass jedes nicht-leere reduzierte Wort in $S^{\pm}$ ein nicht-triviales Element in G definiert. Wir sagen dann G ist *frei von S erzeugt* und nennen S *freies Erzeugendensystem* von G.

Bemerkung 2.1.2. Sei S ein Erzeugendensystem einer Gruppe G. Dann ist S kein freies Erzeugendensystem, wenn eine der beiden folgenden Eigenschaften erfüllt ist: Es existiert ein $s \in S$ mit $s^{-1} \in S$, oder $\mathbb{1} \in S$. Vergleiche auch Übungsaufgabe 6.2.2.

Um zu zeigen, dass es freie Gruppen gibt werden wir diese explizit konstruieren.

Definition 2.1.3 (Reduzierte Wörter)**.** Sei A eine beliebige Menge.

1. Ein *Wort* w über A ist eine endliche Folge von Elementen aus A, das heißt $w = y_1 \cdots y_n$ mit $y_i \in A$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

2. Sei $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$ die Menge der formalen Inversen der Elemente in A. Dann heißt $A^{\pm} := A \cup A^{-1}$ ein *Alphabet*. Wörter über $A^{\pm}$ sind dann

Ausdrücke der Form

$$w = y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_n^{\varepsilon_n} = z_1 \cdots z_n,$$

mit $y_i \in A$ und $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, wobei $y_i^{+1} := y_i$, bzw. mit $z_i \in A^{\pm}$.

3. Ein Wort über $A^{\pm}$ heißt *reduziert*, falls es kein Teilwort der Form aa^{-1} bzw. $a^{-1}a$ enthält.

4. Sei $w = y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_n^{\varepsilon_n}$ ein Wort über $A^{\pm}$. Dann nennen wir n die *Länge von w* und schreiben $|w| = n$.

Bemerkung 2.1.4. Ist die Menge A in Definition 2.1.3 Teilmenge einer Gruppe G, so ist für jedes $a \in A$ auch a^{-1} ein Gruppenelement und wir setzen

$$A^{-1} := \{a^{-1} \in G \mid a \in A\}.$$

Um aus der Menge der Wörter über einem Alphabet eine Gruppe zu machen müssen wir berücksichtigen, dass das Produkt eines Buchstaben mit seinem (formalen) Inversen in der Gruppe trivial sein muss. Aus diesem Grund führen wir jetzt Reduktionsschritte und reduzierte Formen ein.

Definition 2.1.5 (Reduzierte Form eines Wortes)**.** Sei A eine beliebige Menge und $w = y_1 \cdots y_n$ ein Wort über $A^{\pm}$, also $y_i \in A^{\pm}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

1. Ein *elementarer Reduktionsschritt* von w besteht aus dem Löschen eines Teilwortes des Form aa^{-1} aus w, mit $a \in A^{\pm}$.

2. Eine *Reduktion von w* ist eine Folge elementarer Reduktionsschritte

$$w \to w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_n,$$

sodass w_n ein reduziertes Wort ist.

3. Wir nennen das Ende w_n einer Reduktion eine *reduzierte Form* von w und schreiben für diese $\overline{w}$.

Obige Definition einer reduzierten Form ist nur dann hilfreich, wenn verschiedene Reduktionen eines gegebenen Wortes übereinstimmen. Das wird in den folgenden Lemmata nachgerechnet.

Lemma 2.1.6 (Elementare Reduktionsschritte kommmutieren)**.** *Seien $w \to w_1$ und $w \to w_2$ zwei elementare Reduktionsschritte von w. Dann existiert ein w_0 und elementare Reduktionsschritte $w_i \to w_0$ für $i = 1, 2$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_1 \arrow[dr] & \circlearrowleft & w_2 \arrow[dl] \\ & w_0 & \end{tikzcd}$$

Beweis. Seien $\lambda_1 : w \to w_1$ und $\lambda_2 : w \to w_2$ die nach Annahme existierenden elementaren Reduktionsschritte. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass λ_1 von λ_2 verschieden ist und betrachten zwei Fälle:
1. Fall: Disjunkte Reduktionsschritte. D.h. die elementaren Reduktionsschritte λ_i für $i = 1, 2$ löschen jeweils auftretende Teilwörter der Form $(y_1 y_1^{-1})$ bzw. $(y_2 y_2^{-1})$ im Wort w (mit $y_i \in A^{\pm}$) deren Indizes sich nach Annahme nicht überlappen. Wir können w daher für geeignet gewählte und möglicherweise leere Wörter u_i über $A^{\pm}$ wie folgt schreiben:

$$w = u_1(y_1 y_1^{-1})u_2(y_2 y_2^{-1})u_3.$$

Dann gilt mit $w_0 := u_1u_2u_3$ offensichtlich, dass $\lambda_1 \circ \lambda_2 = \lambda_2 \circ \lambda_1$ und das resultierende Wort in beiden Fällen gleich w_0 ist.
2. Fall: Überlappende Reduktionsschritte. Seien λ_1 und λ_2 so gegeben, dass die betroffenen Positionen an denen Löschungen stattfinden teilweise überlappen. Dann muss bereits $y_1 = y_2$ sein und das Wort w lässt sich schreiben als $w = u_1 y_1 y_1^{-1} y_2 u_2$. Die Reduktionsschritte sind somit gegeben durch

$$\begin{aligned} w = u_1 y_1 (y_1^{-1} y_2) u_2 &\xrightarrow{\lambda_2} u_1 y_1 u_2 =: w_2 \quad \text{und} \\ w = u_1 (y_1 y_1^{-1}) y_2 u_2 &\xrightarrow{\lambda_1} u_1 y_2 u_2 =: w_1. \end{aligned}$$

Wegen $y_1 = y_2$ ist auch $w_2 w_1 =: w_0$ und die Reduktionsschritte kommutieren. □

Lemma 2.1.7 (Eindeutige reduzierte Form)**.** *Sei w ein Wort in $A^{\pm}$. Dann besitzt w eine eindeutige reduzierte Form.*

Beweis. Wir verfahren mittels Induktion über die Länge $|w|$des Wortes w.
Ist $|w| = 0$, so ist w das leere Wort, reduziert und es ist nichts zu zeigen. Ebenso sind alle Wörter der Länge 1 reduziert.
Sei jetzt $|w| > 1$ und seien $w \to w_1' \to \cdots \to w_n'$ und $w \to w_1'' \to \cdots \to w_m''$ zwei Reduktionen von w.
Nach Lemma 2.1.6 existiert nun eine gemeinsame Reduktion von w_1' und w_1'', d.h. ein Wort w_1 in $A^{\pm}$ sowie elementare Reduktionsschritte $w_1' \to w_1$ und $w_1'' \to w_1$. Verglei-

che Abbildung 2.1 in der nun der Teil des Diagramms auf den Wörtern w, w_1', w_1'' und w_1 kommutiert.

$$
\begin{tikzcd}
 & w \arrow[dl, "\lambda_1"'] \arrow[dr, "\lambda_2"] & \\
w_1' \arrow[dr, "\lambda_2"'] \arrow[dd] & \circlearrowright & w_1'' \arrow[dl, "\lambda_1"] \arrow[dd] \\
 & w_1 \arrow[d] & \\
w_2' \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & w_2'' \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & w_k & \vdots \arrow[d] \\
w_n' & & w_m''
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2.1: Reduktionsdiagramm zum Beweis von Lemma 2.1.7

.

Sei nun $w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_k$ eine Reduktion von w_1. Diese ist nach Induktionshypothese eindeutig, da die Länge $|w_1|$ echt kleiner ist als die Länge $|w|$. Ebenso ist $|w_1'| < |w|$ und $|w_1''| < |w|$. Also sind nach Induktionshypothese auch die Reduktionen von w_1' und w_1'' eindeutig.
Es muss also gelten, dass $w_n' = w_k$, weil beides die eindeutige Reduktion von w_1' beschreibt, und analog gilt $w_k = w_m''$. Also folgt $w_n' = w_m''$ und auch w besitzt eine eindeutige Reduktion. Insbesondere muss gelten $n = k = m$. $\square$

Definition 2.1.8 (Konstruktion einer freien Gruppe)**.** Sei A eine beliebige Menge und A^{-1} die Menge der formalen Inversen. Setze

$$F(A) := \{\text{reduzierte Wörter in } A^{\pm}\}$$

und definiere eine Verknüpfung für $u, w \in F(A)$ durch

$$w \cdot u := \overline{wu},$$

wobei $\overline{wu}$ die reduzierte Form des Wortes wu beschreibt, das durch Hintereinanderschreiben der Wörter w und u entsteht.
Wir nennen $F(A)$ mit dieser Verknüpfung die *freie Gruppe über* A.

Die Verknüpfung in $F(A)$ entspricht, salopp gesagt, also

$$\text{Hintereinanderschreiben} + \text{Reduktion}$$

von Worten über $A^{\pm}$.

Statt $F(A)$ schreiben wir manchmal auch $F_{|A|}$, da freie Gruppen über Mengen der gleichen Kardinalität isomorph sind mit Isomorphismen, die durch beliebige Bijektionen auf den Erzeugern in A induziert werden.

Zunächst müssen wir aber zeigen, dass es sich bei der Konstruktion in Definition 2.1.8 wirklich um eine freie Gruppe im Sinne von Definition 2.1.1 handelt.

Theorem 2.1.9 ($F(A)$ ist freie Gruppe)**.** *Für eine beliebige Menge A ist die Menge $F(A)$ eine frei von A erzeugt Gruppe bezüglich der in Definition 2.1.8 definierten Verknüpfung.*

Beweis. Die Tatsache, dass wir es mit einer Verknüpfung in $F(A)$ zu tun haben folgt aus Lemma 2.1.7 und der Definition der Menge $F(A)$. Das leere Wort entspricht dem neutralen Element und das Inverse eines Elementes $y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_n^{\varepsilon_n}$ mit $y_i \in A$ und $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ ist gegeben durch $y_n^{-\varepsilon_1} \cdots y_1^{-\varepsilon_1}$, da dann die Verknüpfung gerade dem leeren Wort entspricht. Alle anderen Axiome einer Gruppe lassen sich leicht nachrechnen. Dass A ein freies Erzeugendensystem ist folgt direkt aus der Definition von $F(A)$. $\square$

Wir beweisen nun eine charakterisierende, universelle Eigenschaft freier Gruppen.

Theorem 2.1.10 (Universelle Eigenschaft freier Gruppen)**.** *Sei F eine Gruppe mit Erzeugendensystem $A \subseteq F$. Die Gruppe F ist genau dann frei von A erzeugt, wenn F folgende* universelle Eigenschaft *erfüllt: Für jede Gruppe G und jede Abbildung $\Phi : A \to G$ ein eindeutiger Homomorphismus $\widetilde{\Phi} : F \to G$ existiert, sodass folgendes Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\Phi"'] & F \arrow[d, "\tilde{\Phi}!"] \\
& G.
\end{tikzcd}$$

Dabei ist ι die Inklusionsabbildung von A nach F.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei zunächst F frei von A erzeugt und sei $\Phi : A \to G$ eine gegebene Abbildung. Jedes Element $g \in F$ ist ein reduziertes Wort über $A^{\pm}$ der Form

$$g = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}, \text{ mit } s_{i_j} \in A \text{ und } \varepsilon_i \in \{1, -1\}.$$

Definiere die Abbildung $\widetilde{\Phi} : F \to G$ durch

$$\widetilde{\Phi}(g) := (\Phi(s_{i_1}))^{\varepsilon_1} \cdots (\Phi(s_{i_n}))^{\varepsilon_n} . \tag{2.1.1}$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass $\widetilde{\Phi}$ tatsächlich ein Homomorphismus ist. Vergleiche Übungsaufgabe 6.2.3. Außerdem ist $\widetilde{\Phi}$ gerade so definiert, dass das Diagramm kommutiert. Da aber jeder Homomorphismus, für den das Diagramm kommutiert, die Gleichung in 2.1.1 erfüllen muss, ist $\widetilde{\Phi}$ auch eindeutig.
„$\Leftarrow$“: Sei nun F eine Gruppe, die die universelle Eigenschaft bzgl. eines Erzeugendensystems A erfüllt. Sei $G := F(A)$ die freie Gruppe über A. Wir wollen zeigen, dass $G \cong F$ gilt. Definiere hierzu eine Abbildung $\Phi : A \to G$ durch $\Phi(a) := a$ für alle $a \in A$. Da die universelle Eigenschaft gilt, erweitert Φ eindeutig zu einem Homomorphismus $\widetilde{\Phi} : F \to G = F(A)$.
Sei nun w ein nicht-leeres, reduziertes Wort über $A^{\pm}$. Dann beschreibt w ein nichttriviales Gruppenelement in G. Es gibt somit ein $g \in F$ mit $\widetilde{\Phi}(g) = w \in G$. Da $\widetilde{\Phi}$ ein Homomorphismus ist, folgt, dass auch g in F nicht trivial sein kann und somit $\ker(\widetilde{\Phi}) = \mathbb{1}_G$. Da $\widetilde{\Phi}$ nach Konstruktion surjektiv ist, folgt die Behauptung. □

2.2 Freie Gruppen und Bäume

Im weiteren werden wir ein paar Eigenschaften und Charakterisierungen freier Gruppen kennen lernen, die alle mit Bäumen, also kreisfreien Graphen, zu tun haben.

Theorem 2.2.1 (Cayleygraphen freier Gruppen)**.** *Ist G frei erzeugt von S, dann ist $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, S)$ ein Baum.*

Beweis. Da G frei von S erzeugt ist, entsprechen die Elemente in G gerade den reduzierten Wörtern über $S^{\pm}$ und insbesondere ist das neutrale Elemente $\mathbb{1}$ nicht in S enthalten. Somit folgt direkt, dass $\Gamma := \overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, S)$ zusammenhängend und schleifenfrei ist. Es bleibt also noch zu zeigen, dass keine Kreise in $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, S)$ existieren.
Wir argumentieren mit Widerspruch. Angenommen, es existiert ein Kreis in Γ. Dann existieren Gruppenelemente $g_0, g_1, \ldots, g_n \in G$, und Kanten e_i im Cayleygraph mit

$$\delta(e_i) = \{g_i, g_{i+1}\} \ \forall i = 0, \ldots, n-1, \text{ sowie } \delta(e_n) = \{g_n, g_0\}.$$

Definiere dann

$$s_j := g_j^{-1} g_{j+1} \text{ für alle } j = 0, \ldots, n-1, \text{ sowie } s_n := g_n^{-1} g_0.$$

Nach Definition des Cayleygraphen $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, S)$ sind alle $s_i \in S \cup S^{-1}$.
Wir zeigen jetzt (mit Widerspruch), dass das Wort $s_0 \cdots s_n$ reduziert ist.
Angenommen, das Wort wäre nicht reduziert und beispielsweise $s_0 = s_1^{-1}$. Dann gilt $g_0^{-1} g_1 = g_2^{-1} g_1$ womit folgt, dass $g_0 = g_2$. Falls dabei $g_0 = g_1 = g_2$ gilt, sind die beiden

entsprechenden Kanten Schleifen, also $s_0 = s_1 = e$. Ist aber $g_1 \neq g_2$, so ist Kante e_0 von Kante e_2 verschieden und die ersten beiden Kanten bilden eine Doppelkante. Also gilt $\mathbb{1} \in S$ oder es existiert ein $s \in S$ mit $s^{-1} \in S$, was einen Widerspruch dazu darstellt, dass G frei von S erzeugt ist. Vergleiche dazu Bemerkung 2.1.2. Somit muss das oben konstruierte Wort $s_0 \cdots s_n$ reduziert sein.
Wenn ein Kreis in $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, S)$ existiert, erhalten wir also ein reduziertes Wort $s_0 \dots s_n$ in G welches das triviale Element beschreibt. Insbesondere kann G nicht frei erzeugt sein von S. □

Definition 2.2.2 (Reduziertes Erzeugendensystem)**.** Ein Erzeugendensystem S heißt *reduziert*, wenn für alle $s, t \in S$ gilt, dass $s \cdot t \neq e$ ist.

Theorem 2.2.3 (Umkehrung von Theorem 2.2.1)**.** *Sei G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem. Ist $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, S)$ ein gerichteter Baum, dann ist S ein freies (insbesondere reduziertes) Erzeugendensystem und G ist frei.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $G \cong F_S$ gilt. Aus der universellen Eigenschaft freier Gruppen erhalten wir einen Homomorphismus $\varphi : F_S \to G$ mit $\varphi|_S = id$. Da G von S erzeugt ist, ist φ surjektiv. Es bleibt also zu zeigen, dass φ injektiv, also ein Isomorphismus ist.
Angenommen, φ sei nicht injektiv. Dann existiert ein reduziertes Wort $s_1 \cdots s_n$ in F_S mit $s_i \in S \cup S^{-1}$ und

$$\varphi(s_1 \cdots s_n) = e_G.$$

Da $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, S)$ ein Baum ist, existieren keine Schleifen und keine Doppelkanten im Cayleygraphen. Das bedeutet $\mathbb{1} \notin S$ und für alle $s \in S$ gilt $s^{-1} \notin S$. Es folgt für alle $s, t \in S$, dass $s \cdot t \neq \mathbb{1}$ gilt, also dass S reduziert ist. Da $\varphi|_S$ injektiv ist und $\mathbb{1} \notin S$ gilt, folgt $n > 2$ für das Wort $s_1 \cdots s_n$. Das reduzierte Wort definiert also einen geschlossenen Pfad in $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, S)$ wie folgt: Setze

$$g_0 := \mathbb{1} \text{ und } g_k := g_{k-1}\varphi(s_i) \; \forall k = 1, \dots, n.$$

Es ist insbesondere dann $g_n = g_{n-1}\varphi(s_n) = \varphi(s_1 \cdots s_n) = \mathbb{1} = g_0$. Ist dieser geschlossene Kantenzug ein Kreis, sind wir fertig. Andernfalls gibt es $k \neq l \mod n$ mit $k < l$ und $g_k = g_l$.
1. Fall: Sei $l = k + 1$. Dann existiert eine Schleife in $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, S)$ und $\mathbb{1}_G \in S$ – was im Widerspruch zur Reduziertheit von S steht.
2. Fall: Sei $l = k + 2$. Dann gilt $g_k = g_{k+2}$ und $g_k = g_k\varphi(s_{k+1}s_{k+2})$. Daraus folgt $s_{k+1}s_{k+2} = \mathbb{1}$ und wir sehen eine Doppelkante, was ebenfalls nicht sein kann wegen der Reduziertheit von S.
3. Fall: Sei $l > k + 2$. Dann gilt

$$g_k = g_l = g_{l-1}\varphi(s_l) = \cdots = g_k\varphi(s_k s_{k+1} \cdots s_l),$$

wobei $s_k s_{k+1} \cdots s_l$ ein reduziertes Wort der Länge $(l-k) < n$ ist. Dann können wir $s_1 \cdots s_n$ durch $s_k \cdots s_l$ ersetzen und erhalten induktiv einen kürzeren Kreis oder wieder einen der Fälle 1 und 2.

In jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch und es folgt, dass φ injektiv ist. Insbesondere gilt $G \cong F(S)$. Damit ist S freies Erzeugendensystem für G. $\square$

Ziel ist es nun Theorem 2.2.4 zu beweisen und freie Gruppen mittels ihren Wirkungen auf Bäumen zu charakterisieren.

Theorem 2.2.4 (Charakterisierung freier Gruppen via Wirkung auf Bäumen). *Eine Gruppe ist genau dann frei, wenn sie frei auf einem Baum wirkt.*

Für den Beweis dieses Theorems benötigen wir weitere Hilfsmittel, die jetzt eingeführt werden.

Definition 2.2.5 (Untergraphen und Bäume). Ein *Untergraph* eines Graphen $X = (V, E)$ ist ein Graph (V', E') mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Ein *Unterbaum* ist ein Untergraph, der selbst ein Baum ist.

Definition 2.2.6 (Fundamentalbäume). Sei G eine Gruppe und sei $X = (V, E)$ ein zusammenhängender simplizialer Graph auf dem G wirke. Ein *Fundamentalbaum* für diese Wirkung ist ein Unterbaum von X, der genau eine Ecke aus jeder G-Bahn in V enthält.

Beispiel 2.2.7. Die Gruppe $\mathbb{Z}$ wirkt auf dem Graphen $X = (V, E)$ in Abbildung 2.2 durch Links- bzw. Rechtstranslation. Hierbei sind a, b und c Repräsentanten der 3 disjunkten Bahnen in $V(X)$ und der auf a, b, c aufgespannte Untergraph ein Fundamentalbaum dieser Wirkung.

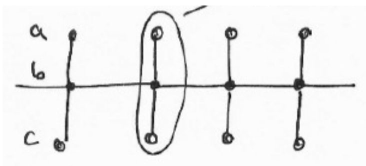

Abbildung 2.2: Ein Graph mit markiertem Fundamentalbaum für die $\mathbb{Z}$-Wirkung durch Links-/Rechtstranslation.

Proposition 2.2.8 (Existenz von Fundamentalbäumen). *Sei X ein nicht-leerer, zusammenhängender, simplizialer Graph. Dann besitzt jede Wirkung $G \curvearrowright X$ einen Fundamentalbaum.*

Beweis. Sei G eine Gruppe, die auf einem solchen Graphen X wirkt. Bezeichne mit T_G die Menge aller nicht-leeren Unterbäume von X, die aus jeder Bahn höchstens eine Ecke enthalten. Diese Menge ist nicht leer, da beispielsweise jede Ecke (aufgefasst als Graph) in T_G ist. Außerdem ist T_G durch die Teilbaum-Relation partiell geordnet, d.h. für $T, T' \in T_G$ ist $T < T'$, wenn T Unterbaum von T' ist.
Jede totalgeordnete Kette in T_G hat eine obere Schranke, die Vereinigung aller Kettenelemente. Mit dem Zornschen Lemma folgt, dass mindestens ein maximales Element $T_0 \neq \varnothing$ in T_G existiert.
Wir wollen nun Zeigen, dass ein solches maximales Element T_0 ein Fundamentalbaum für $G \curvearrowright X$ ist und argumentieren mit Widerspruch. Angenommen, T_0 sei kein Fundamentalbaum für $G \curvearrowright X$. Dann existiert Ecke $v \in V$, sodass $V(T_0) \cap G.v = \varnothing$.
Beh: Wir können annehmen, dass v einen Nachbarn v'' in T_0 besitzt. Wäre ein solche Wahl nicht möglich, so wähle eine feste Ecke $u \in T_0$ und einen Pfad $p : u \rightsquigarrow v$ in X. Sei v' die erste Ecke auf p, die nicht in T_0 ist. Diese Situation ist in Abbildung 2.3 skizziert.
Ist nun $G.v' \cap V(T_0) = \varnothing$, dann können wir v durch v' ersetzen, da dieses die gesuchte Eigenschaft hat.
Falls ein $g \in G$ existiert, sodass $g.v'$ eine Ecke von T_0 ist betrachte den Teilpfad $p' : v' \rightsquigarrow v$. Dessen Bild $g.p' : g.v' \rightsquigarrow gv$ verbindet eine Ecke gv' von T_0 mit einer Ecke $gv \in G.v$, die nicht in T_0 liegt (da nach Annahme $V(T_0) \cap G.v = \varnothing$). Der Pfad p' ist kürzer als der Pfad p. Iteriere den Prozess und finde schließlich eine Ecke mit der gesuchten Eigenschaft. Es gilt die Behauptung.
Wir haben also eine Ecke $v \notin T_0$ mit $V(T_0) \cap G.v = \varnothing$, die einen Nachbarn $v'' \in T_0$ hat. D.h. es existiert eine Kante e mit $\delta(e) = \{v, v''\}$ und $v'' \in T_0$. Füge diese Kante e und ihre Ecke außerhalb zum Baum T_0 hinzu. Der so entstandene größere Baum T_0' ist in T_G und hat T_0 als echten Unterbaum. Also gilt $T_0 < T_0'$, was im Widerspruch zur Maximalität von T_0 in T_G steht. $\square$

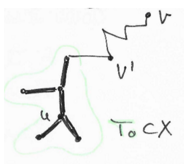

Abbildung 2.3: Ein Weg von $u \in T_0$ nach v, mit v' erste Ecke, die nicht in T_0 liegt.

Definition 2.2.9 (Wesentliche Kanten)**.** Sei T ein Baum und G eine Gruppe mit freier Wirkung auf T. Weiter sei T_0 ein Fundamentalbaum dieser Wirkung.
Eine Kante e in T heißt *wesentlich*, wenn $e \notin E(T_0)$, aber $\delta(e) \cap V(T_0) \neq \varnothing$ gilt.

Beispiel 2.2.10. In Abbildung 2.4 sind die Kanten e_1 und e_2 wesentlich. Sie gehören nicht zu den Kanten des Fundamentalbaums T_0, haben aber je eine Ecke, die in T_0 liegt.

Wir können jetzt Theorem 2.2.4 beweisen.

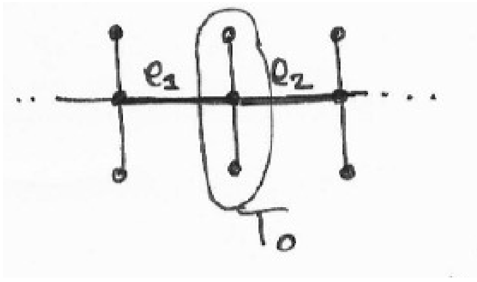

Abbildung 2.4: Wesentliche Kanten e_1 und e_2 für einen Fundamentalbaum T_0 für die Wirkung $\mathbb{Z} \curvearrowright X$ aus Beispiel 2.2.7.

Beweis von Theorem 2.2.4. „$\Rightarrow$": Ist G frei von S erzeugt, so ist der Cayleygraph $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S) =: T$ nach Theorem 2.2.1 ein Baum, auf dem G wirkt.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass diese Wirkung frei ist. Wegen Theorem 1.3.26 genügt es nachzuweisen, dass S keine Elemente der Ordnung 2 besitzt. Beachte, dass in unserer Situation $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S) = \mathrm{Cay}(G,S)$ mit vergessener Orientierung gilt.

Wir argumentieren mit Widerspruch und nehmen an, dass es ein Element $s \in S$ mit $s^2 = \mathbb{1}$ gibt. Dann ist insbesondere $s = s^{-1}$.

Betrachte die Abbildung $\varphi : S \to (\mathbb{Z}, +)$ mit $\varphi(s) := \varphi(s^{-1}) := 1$ für alle $s \in S$. Mit der universellen Eigenschaft freier Gruppen aus Theorem 2.1.10 erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus $\overline{\varphi} : G \to \mathbb{Z}$ für den gilt $\overline{\varphi}(\iota(s)^2) = 0$ und folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\overline{\varphi}!"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & (\mathbb{Z},+) \end{tikzcd}$$

Es folgt $0 = \overline{\varphi}(s \cdot s^{-1}) = \overline{\varphi}(s) + \overline{\varphi}(s^{-1}) = 2$, also ergibt sich ein Widerspruch.

„$\Leftarrow$": Sei nun eine freie Wirkung von G auf einem Baum gegeben. Wir werden mit Hilfe von Fundamentalbäumen ein freies Erzeugendendensystem S für G konstruieren.

Dazu nutzen wir, dass nach Proposition 2.2.8 ein Fundamentalbaum für diese Wirkung existiert. Fixiere einen solchen Baum T_0. Die zentrale Idee ist, jede Kopie von T_0 unter der G-Wirkung auf eine Ecke zu „schrumpfen" und so einen Cayleygraphen und schließlich ein freies Erzeugendensystem zu erhalten.

Sei $e = \{u, v\}$ eine wesentliche Kante in T mit $u \in T_0$ und $v \notin T_0$. Da T_0 ein Fundamentalbaum ist, existiert ein Element $g_e \in G$, sodass $g_e^{-1}v$ eine Ecke von T_0 ist, bzw. sodass v Ecke von $g_e T_0$ ist. Dieses Element g_e ist eindeutig, denn $G.v$ trifft den Baum T_0 in genau einer Ecke und $G \curvearrowright T$ ist frei.

Wir definieren nun eine Kandidatenmenge für Erzeugendensystem. Setze dazu

$$\widetilde{S} := \{g_e \text{ in } G : \ e \text{ ist wesentliche Kante von } T \text{ bzgl. } T_0\}.$$

Die Menge $\widetilde{S}$ hat folgende Eigenschaften:

1. Nach der Definition von wesentlich gilt $\mathbb{1} \notin \widetilde{S}$.

2. Es existieren keine Elemente der Ordnung 2 in $\widetilde{S}$, da G frei wirkt und jedes Element endlicher Ordnung einen Fixpunkt besitzt. (Vergleiche die Übungsaufgaben zu diesem Kapitel).

3. Sind e, e' wesentliche Kanten mit $g_e = g_{e'}$ so gilt $e = e'$. Wäre dem nicht so würden zwei verschiedene Kanten zwischen T_0 und $g_e T_0 = g_{e'} T_0$ existieren. Dies liefert einen Kreis T was aber nicht sein kann, da T ein Baum ist.

4. Ist $g \in \widetilde{S}$ so ist auch g^{-1} in $\widetilde{S}$. Sei zum Beispiel $g = g_e$ das element zur wesentliche Kante e dann gilt $(g_e)^{-1} = g_{(g^{-1}e)}$ und somit ist auch $g^{-1}e$ eine wesentliche Kante.

Wir können also $\widetilde{S}$ schreiben als disjunkte Vereinigung einer Teilmenge S und der Menge ihrer Inversen S^{-1}. Mit obigen Eigenschaften ist $S \cap S^{-1} = \varnothing$, $S \cup S^{-1} = \widetilde{S}$ und

$$|S| = \frac{1}{2}\left|\widetilde{S}\right| = \frac{1}{2} \cdot \#\text{wesentliche Kanten von } T_0 \text{ in } T.$$

Wir zeigen nun, dass S die Gruppe G erzeugt. Sei dazu Sei $g \in G$ und u eine fest gewählte Ecke in T_0. Da T zusammenhängend ist, existiert ein (kürzester) Pfad p von u nach gu. Da die Eckenmenge von T sich schreiben lässt als Vereinigung über die Orbiten von Ecken in T_0 können wir folgern, dass Elemente $g_0, \ldots, g_n$ in G existieren, sodass der Pfad $n+1$ Kopien $g_j T_0$ von T_0 durchläuft. Dabei können wir $g_0 = \mathbb{1}$ sowie $g_n = g$ wählen.
Da zudem T_0 ein Fundamentalbaum ist, gilt für alle $j = 0, \ldots, n-1$, dass $g_j T_0 \neq g_{j+1} T_0$ ist und die Kopien $g_j T_0$ und $g_{j+1} T_0$ jeweils durch eine Kante e_j des Pfades p verbunden sind.
Nach Konstruktion ist daher $g_j^{-1} e_j$ eine wesentliche Kante und $s_j := g_j^{-1} g_{j+1}$ liegt in $\widetilde{S}$. Nach Konstruktion von S ist also entweder s_j oder sein inverses in S für alle j. Das Element g lässt sich nun schreiben als

$$g = g_n = g_0^{-1} g_n = \underbrace{g_0^{-1} g_1}_{=s_0} \underbrace{g_1^{-1} g_2}_{=s_1} \cdots \underbrace{g_{n-1}^{-1} g_n}_{s_{n-1}} = s_0 s_1 \cdots s_{n-1}.$$

Also ist $\widetilde{S}$ und wegen $\widetilde{S} = S \bigsqcup S^{-1}$ und auch S ein Erzeugendensystem von G.
Es bleibt zu zeigen, dass S die Gruppe G frei erzeugt. Kontrahiere für alle $g \in G$ den Unterbaum gT_0 zu einer Ecke. Kanten zwischen gT_0 und anderen Unterbäumen werden zu kanten zwischen den resultierenden Ecken. Als Ergebnis erhält man den Graphen $\mathrm{Cay}(G, \widetilde{S})$. Um nun zu zeigen, dass dieser Graph ein Baum ist reicht es, Dank Theorem 2.2.3, nachzurechnen, dass $\mathrm{Cay}(G, S)$ keine Kreise enthält.
Wir argumentieren mit Widerspruch und nehmen an es existiere ein Zykel $g_0, \ldots, g_{n-1}$ in $\mathrm{Cay}(G, S)$, also $g_n = g_0$.
Dann definiere für alle $j = 0, \ldots, n-1$ die Elemente $s_j := g_j^{-1} g_{j+1}$. Wir können S o.E. so wählen, dass $s_j \in S$ liegt. Sei weiter e_j eine wesentliche Kante in T zwischen T_0 und $s_j T_0$ für alle $j = 0, \ldots, n-1$.
Da jedes Translat von T_0 ein zusammenhängender Teilbaum von T ist lassen sich die beiden Ecken der Kanten $g_j e_j$ und $g_j s_j e_{j+1} = g_{j+1} e_{j+1}$, die in $g_{j+1} T_0$ liegen, durch einen

eindeutigen Weg in $g_{j+1}T_0$ verbinden. Vergleiche dazu Abbildung 2.5). Durch Verketten dieser Pfade lässt sich ein Kreis in T konstruieren der von T_0 über $T_1, T_2, \ldots$ zurück nach $g_n T_0 = T_0$ führt. Es ergibt sich ein Widerspruch dazu, dass T ein Baum ist. Es kann also Kreise dieser Form nicht geben. Es folgt, dass $\mathrm{Cay}(G, S)$ ebenfalls keine Kreise enthält und S die Gruppe G frei erzeugt. □

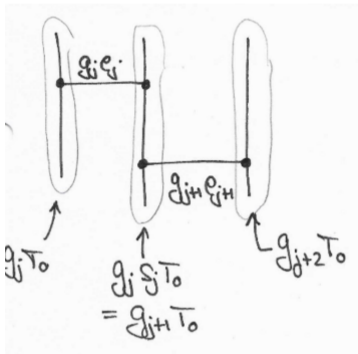

Abbildung 2.5: Kopien des Fundamentalbaums.

Im Folgenden sehen wir Anwendungen von Theorem 2.2.4 und nutzen Cayleygraphen, um algebraische Eigenschaften zu zeigen.

Korollar 2.2.11 (Satz von Nielsen-Schreier)**.** *Untergruppen freier Gruppen sind frei.*

Beweis. Sei F freie Gruppe, $G \leq F$. Mit Theorem 2.2.4 wirkt F dann frei auf einem Baum T. Dann wirkt aber auch G frei auf T und somit ist G mit Theorem 2.2.4 frei. □

Der *Index* einer Untergruppe G in einer Gruppe F ist die Anzahl an Nebenklassen von G in F. Wir schreiben $|F : G|$.

Korollar 2.2.12 (Quantitative Version des Satzes von Nielsen-Schreier)**.** *Sei F eine freie Gruppe von Rang n und sei $G \leq F$ eine Untergruppe von Index $k \in \mathbb{N}$. Dann ist G frei und von Rang $k(n-1)+1$. Insbesondere sind also Untergruppen von endlichem Index in freien Gruppen von endlichem Rang endlich erzeugt.*

Beweis. Sei S freies Erzeugendensystem von F und schreibe $\Gamma := \mathrm{Cay}(F, S)$. Also ist Γ ein Baum und G und F wirken frei auf Γ. Aus dem Beweis von 2.2.4 sehen wir, dass $\mathrm{Rang}(G) = \frac{1}{2} \cdot E$ gilt, wobei E die Anzahl der wesentlichen Kanten eines Fundamentalbaums T_0 ist. Aus $|F : G| = k$ folgt, dass T_0 genau k Ecken hat, da der Index gerade der Anzahl der Nebenklassen (bzw. disjunkten Orbiten) der Gruppenwirkung entspricht. Wir schreiben nun $d_\Gamma(v)$ für den Eckengrad von v in Γ. Es gilt für alle $v \in V(\Gamma)$, dass

$$d_\Gamma(v) = 2 \cdot |S| = 2 \cdot n$$

und wir erhalten

$$\sum_{v \in V(T_0)} d_{T_0}(v) = k \cdot 2n. \tag{2.2.1}$$

Andererseits ist T_0 endlich und besitzt $(k-1)$ Kanten, die in Gleichung (2.2.1) alle doppelt gezählt werden. Somit ist

$$k \cdot 2n = \sum_{v \in V(T_0)} d_T(v) = \underbrace{2(k-1)}_{2 \cdot \text{Kanten in } T_0} + \underbrace{E}_{\text{Kanten von } T_0 \text{ nach } \Gamma \backslash T_0}$$

und es folgt die Behauptung: $\mathrm{Rang}(G) = \frac{1}{2}E = k \cdot n - (k-1) = k(n-1) + 1$. □

Korollar 2.2.13 (freie Untergruppen von beliebigem Rang)**.** *Sei F eine freie Gruppe von Rang $m \geq 2$. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ eine (freie) Untergruppe G von F mit* $\mathrm{Rang}(G) = n$.

Zum Beweis siehe Übungsaufgabe 6.2.1.

Wir lernen nun ein wichtiges Werkzeug kennen mit dessen Hilfe wir freue (Unter-)Gruppen identifizieren können.

Lemma 2.2.14 (Ping-Pong Lemma)**.** *Sei G eine von $S := \{a, b\}$ erzeugte Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Wenn disjunkte Teilmengen $A, B \subseteq X$ existieren, sodass für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:*

$$a^k(B) \subseteq A \quad \textit{und} \quad b^k(A) \subseteq B,$$

dann ist G frei von S erzeugt.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass kein nicht-leeres, reduziertes Wort in G das triviale Element $\mathbb{1}$ repräsentiert.

Sei dazu zunächst ein Element $g \in G$ gegeben durch ein Wort der Form $a^*b^*a^* \cdots b^*a^*$, wobei wir $*$ stellvertretend für einen beliebigen Exponenten in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ schreiben. Das Wort beginnt und endet also nach Annahme mit einer nicht-trivialen Potenz von a.

Dann ist mit $b^k(A) \subseteq B$ und $a^k(B) \subseteq A$ das Bild $g(B)$ von B unter g Teilmenge von A. Da $B \cap A = \varnothing$ kann also g nicht gleich der Identität sein.

Jedes andere Gruppenelement $g' \in G$ ist konjugiert zu einem g obiger Form. Weil die Konjugationsklasse des trivialen Elementes nur genau das triviale Element enthält folgt die Behauptung für beliebiges g in G.

Also beschreiben alle nicht-trivialen, reduzierten Worte auch nicht-triviale Gruppenelemente und G ist frei. □

Eine Erklärung für den Namen des obigen Lemmas ist in Abbildung 2.6 zu finden.

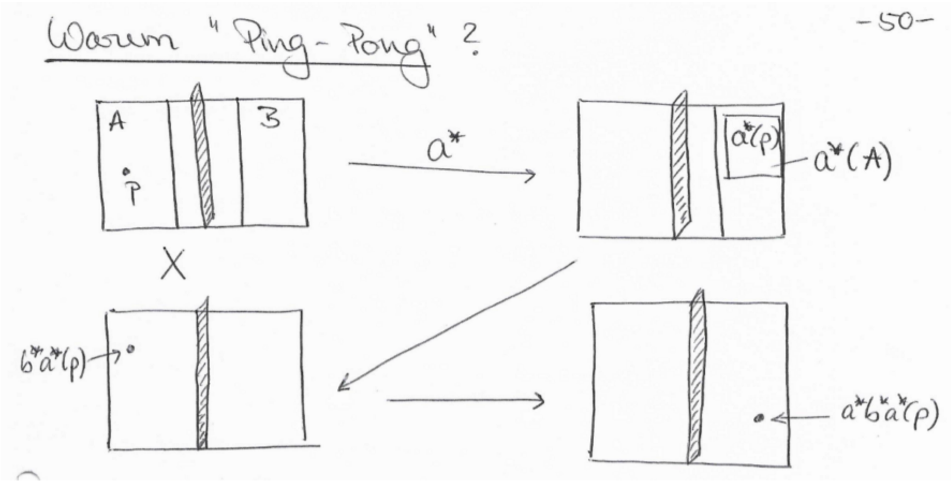

Abbildung 2.6: Visualisierung des Ping-Pong Lemmas.

Beispiel 2.2.15. Das Ping-Pong Lemma kann genutzt werden, um freie Untergruppen in anderen Gruppen zu finden. Als Beispiel konstruieren wir eine freie Untergruppe in

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} : \ ad - bc = \det(\cdots) = 1 \right\}.$$

Setze

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen nun nach, dass die von M_1 und M_2 erzeugte Untergruppe G von $SL(2,\mathbb{Z})$ frei von Rang 2 ist: Wir spielen Ping-Pong!
Betrachte die lineare Wirkung $SL(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$, die definiert ist durch das übliche Matrix·Vektor Produkt. Eine Matrix M bildet dabei einen Vektor $\binom{x}{y}$ wie folgt ab:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}x + m_{12}y \\ m_{21}x + m_{22}y \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, dass

$$M_1^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2ny \\ y \end{pmatrix}.$$

Definiere Teilmengen A und B in $\mathbb{R}^2$ wie in Abbildung 2.7 dargestellt:

$$A := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y| \}$$

$$B := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > |x| \}$$

Es ist $A \cap B = \varnothing$. Sei $\binom{x}{y} \in B$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|x + 2ny| \geq |2ny| - |x|$$

und für $n \geq 1$ und $|y| > |x|$ gilt

$$|2ny| - |x| > |2y| - |y| = |y|\,.$$

Somit ist mit obiger Formel der Vektor $M_1^n \cdot \binom{x}{y} = \binom{x+2ny}{y}$ in der Menge A enthalten, wenn $\binom{x}{y} \in B$ gilt. Also gilt allgemeiner $M_1^n \cdot B \subseteq A$ für alle $n \neq 0$.
Analog rechnet man nach, dass $M_2^n \cdot A \subseteq B$ für beliebiges $n \neq 0$ gilt.
Mit dem Ping-Pong Lemma 2.2.14 folgt die Behauptung.

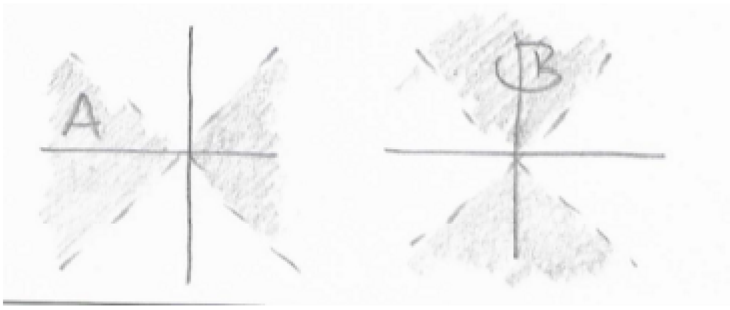

Abbildung 2.7: Die Mengen A und B aus Beispiel 2.2.15 zum Ping-Pong Lemma.

Theorem 2.2.16 (Rang ist wohldefiniert)**.** *Zwei freie Gruppen $F(A)$ und $F(B)$ sind genau dann isomorph, wenn $|A| = |B|$.*

Beweis. Sei zunächst $|A| = |B|$. Dann existiert eine Bijektion $\varphi : A \to B$, die mit der universellen Eigenschaft freier Gruppen eindeutig zu einem Homomorphismus

$$\overline{\varphi} : F(A) \to F(B)$$

erweitert. Da A und B Erzeugendensysteme sind und φ eine Umkehrabbildung φ^{-1} besitzt, ist $\overline{\varphi}$ ein Isomorphismus.
Sei jetzt $F(A) \cong F(B)$ und $\varphi : F(A) \to F(B)$ ein Isomorphismus. Sei $N(A) \leq F(A)$ eine normale Untergruppe, erzeugt von der Menge $\{g^2 :\ g \in F(A)\}$. Die Gruppe $N(B) := \varphi(N(A))$ ist normal in $F(B)$ und von der Menge $\{h^2 :\ h \in F(B)\}$ erzeugt. Daraus folgt, dass φ einen Isomorphismus

$$\psi : F(A)\big/N(A) \overset{\cong}{\to} F(B)\big/N(B)$$

induziert. Es gilt aber

$$F(A)\big/N(A) \cong \bigoplus_{a\in A} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{sowie} \quad F(B)\big/N(B) \cong \bigoplus_{b\in B} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

womit A und B dieselbe Kardinalität haben müssen. □

2.3 Endlich präsentierte Gruppen

In diesem Abschnitt werden Gruppenpräsentierungen eingeführt – eine Methode, um Gruppen anzugeben und zu erzeugen. Jede Gruppe lässt sich auf diese Weise als Quotient einer freien Gruppe darstellen.

Definition 2.3.1 (Gruppenpräsentierungen)**.** Sei S eine beliebige Menge und R eine Menge von (nicht notwendigerweise reduzierten) Wörtern über $S^{\pm}$.

1. Die *von S mit Relationen R erzeugte Gruppe* ist die Gruppe definiert durch den folgenden Quotienten:

$$\langle S \mid R\rangle := F(S)\big/\langle R\rangle^{\triangleleft}_{F(S)}.$$

   Dabei sei $\langle R\rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$ kleinste normale Untergruppe von $F(S)$, die R enthält.

2. Ist G eine zu $\langle S \mid R\rangle$ isomorphe Gruppe, so sagen wir $\langle S \mid R\rangle$ ist eine *Präsentierung* (oder *Darstellung*) von G.

3. Sind sowohl S als auch R endlich, so heißt G *endlich präsentiert.*

Es gibt Gruppen, von denen man weiß, dass es eine isomorphe, endlich präsentierte Gruppe $\langle S \mid R\rangle$ gibt, aber für die man R und S nicht explizit angeben kann. Solche Gruppen nennen wir manchmal *endlich präsentierbar.*

Bemerkung 2.3.2. Die Notation in Definition 2.3.1 ist leicht unpräzise, da wir für Wörter in R auch nicht-reduzierte Formen erlauben müssen. Die freie Gruppe $F(S)$ enthält aber keine reduzierten Wörter. Genauer müssten wir die Menge $\overline{R} = \{\overline{w} :\ w \in R\}$ betrachten und folgenden Quotient nehmen:

$$\langle S \mid R\rangle = F(S)\big/\langle \overline{R}\rangle.$$

Beispiel 2.3.3. Wir betrachten ein paar erste Beispiele von Gruppenpräsentierungen.

1. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle x \mid x^n\rangle$.

   Um das einzusehen, betrachte $\varphi : F(x) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ x \mapsto 1$. Dann gilt

$$\langle x^n\rangle^{\triangleleft}_{F(S)} = \langle x^n\rangle = \ker(\varphi).$$

Weiter ist $F(x)$ abelsch und φ surjektiv, also gilt mit dem Isomorphiesatz

$$\langle x \mid x^n \rangle = {}^{F(x)}\big/_{\ker(\varphi)} \cong {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}.$$

2. Es gilt $\mathbb{Z}^2 \cong \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$.
3. Sei G durch die Präsentierung $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-2},\ yxy^{-1}x^{-2} \rangle$ gegeben. Diese Gruppe ist trivial (ÜA).
4. Die Diedergruppe D_n ist isomorph zu $G := \langle s, t \mid s^n,\ t^2,\ tst^{-1}s \rangle$. Um dies zu zeigen betrachte D_n erzeugt durch eine Spiegelung σ und eine Rotation ρ um Winkel $\alpha = 2\pi/n$. Definiere dann die Abbildung $\varphi : D_n \to G,\ \sigma \mapsto t,\ \rho \mapsto s$ und rechne nach, dass diese Abbildung einen Isomorphismus induziert.
5. Es gibt auch Gruppen, die keine endlichen Präsentierungen besitzen. Die Gruppe $\langle s, t \mid [t^n st^{-n},\ t^m st^{-m}], n, m \in \mathbb{Z} \rangle$ ist beispielsweise endlich erzeugt, aber nicht endlich präsentierbar (Baumslag, 1961).

Bemerkung 2.3.4. Grundlegende aber schwierige Fragen über Gruppenpräsentierungen sind beispielsweise folgende:

1. Das *Isomorphieproblem*: Ob eine gegebene Präsentierung $G = \langle S \mid R \rangle$ die triviale Gruppe liefert (oder zu einer gegebenen anderen Gruppe H isomorph ist), ist im Allgemeinen ein unentscheidbares Problem. D.h. es existiert kein Algorithmus, der für beliebiges gegebenes S und R entscheidet, ob $\langle S \mid R \rangle = \{\mathbb{1}\}$.
2. Im Allgemeinen ist auch das *Wortproblem* in $\langle S \mid R \rangle$ nicht lösbar, d.h. man kann nicht entscheiden, ob ein gegebenes Wort w über dem Alphabet $S^{\pm}$ das neutrale Element in der Gruppe repräsentiert.

Allerdings gibt es für jedes der beiden Probleme auch wieder Klassen von Gruppen innerhalb derer die Frage doch beantwortet werden kann. Wir werden im Laufe der Vorlesung noch mehr dazu hören.

Weitere ganz natürliche Beispiele für endlich präsentierte Gruppen erhalten wir aus der Algebraischen Topologie.

Beispiel 2.3.5 (Flächengruppen)**.** Sei S_g eine geschlossene, orientierbare Fläche von Geschlecht g. Dann ist die Fundamentalgruppe der Fläche gegeben durch folgende Präsentierung:

$$\Pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1 \ldots, a_g b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \rangle.$$

Diese Gruppen werden auch *Flächengruppen* von Geschlecht g genannt. Die Erzeuger a_i bzw. b_i entsprechen dabei den beiden erzeugenden Pfaden je Loch in der Fläche. Siehe Abbildung 2.8 für eine Visualisierung der Erzeuger der Flächengruppen für kleines Geschlecht.

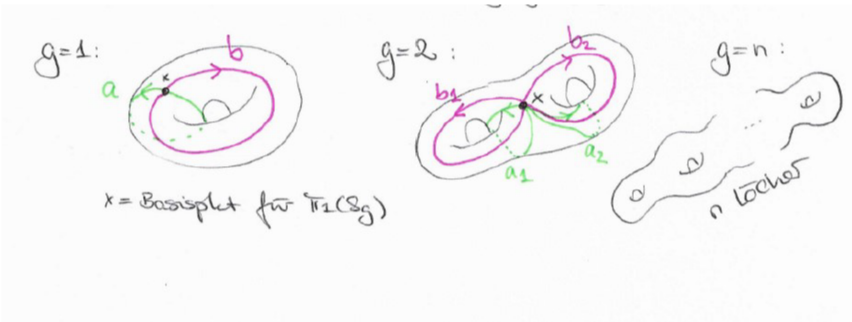

Abbildung 2.8: Visualisierung der Erzeuger von Flächengruppen von Geschlecht 1 und 2.

Wir fassen nun eine Eigenschaft von Gruppenpräsentierungen zusammen, die direkt aus der Definition und der universellen Eigenschaft von freien Gruppen folgt.

Theorem 2.3.6 (Universelle Eigenschaft von Gruppenpräsentationen)**.** *Sei S eine endliche Menge und R eine Menge von Wörtern über $S^{\pm}$. Dann hat die Gruppe $\langle S \mid R\rangle$ folgende universelle Eigenschaft: Sei G eine beliebige Gruppe und $\varphi : S \to G$ eine beliebige Abbildung. Schreibe φ^* für die buchstabenweise kanonische Erweiterung von φ auf Wörter über $S^{\pm}$. Wenn für alle $r \in R$ gilt, dass $\varphi^*(r)$ das neutrale Element in G beschreibt, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus*

$$\overline{\varphi} : \langle S \mid R\rangle \to G \text{ mit } \overline{\varphi} \circ \iota = \varphi.$$

D.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\iota"] & G \\ \langle S \mid R\rangle \arrow[ur, "\overline{\varphi}!"'] & \end{tikzcd}$$

Lernen wir nun ein paar erste prominente Klassen von Gruppen kennen, die direkt über die Form ihrer Präsentierungen definiert sind.

Definition 2.3.7 (Coxetergruppe)**.** Eine *Coxetergruppe* ist eine Gruppe, die eine Präsentierung der Form

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} \ \forall i, j\rangle$$

besitzt, wobei $m_{ij} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ für alle $i \neq j$ und $m_{ii} = 1 \ \forall i$. Hier steht $m_{ij} = \infty$ dafür, dass s_i und s_j nicht in Relation stehen.

Wir können die m_{ij} in einer Matrix $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, die sogenannte *Coxetermatrix*, zusammenfassen. Auf der Diagonalen der Matrix stehen nach Konstruktion immer 1'en, was der Relation $s_i^2 = \mathbb{1}$ entspricht. Coxetergruppen sind also von Involutionen erzeugt. Wir schreiben dann auch Γ_M für die durch M definierte Coxetergruppe.

Beispiel 2.3.8 (Coxetergruppen)**.** Historisch sind Coxetergruppen als Abstraktionen von Spiegelungsgruppen in den drei klassischen Geometrien entstanden. Hier sind drei erste konkrete Beispiele.

1. Diedergruppen D_n sind Coxetergruppen zur Coxetermatrix $M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

2. Die Symmetrische Gruppe S_n entspricht der Coxetergruppe $\Gamma_{M_{n-1}}$ mit Coxetermatrix von Dimension $(n-1) \times (n-1)$:

$$M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & & 3 \\ 2 & \cdots & & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Für $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ist Γ_M die Symmetriegruppe der Parkettierung von $\mathbb{R}^2$ mit gleichseitigen Dreiecken.

Insbesondere ist hier schon zu sehen, dass es sowohl endliche Coxetergruppen als auch unendliche Coxetergruppen gibt. Man kann zeigen, dass die endlichen Coxetergruppen sich immer als Spiegelungsgruppen einer n-Sphäre auffassen lassen. Die Lage bei den unendlichen Coxetergruppen ist etwas komplizierter. Einige davon treten als Spiegelungsgruppen von euklidischen oder hyperbolischen Räumen auf.

Definition 2.3.9 (Artingruppen)**.** Sei S eine Menge von Erzeugern und seien $s_i, s_j \in S$. Die *Zopfrelation der Länge* m_{ij}, auf den Erzeugern s_i und s_j, notiert mit $b(m_{ij})$, ist die Relation der Form:

$$s_i s_j s_i s_j \cdots = s_j s_i s_j s_i \cdots ,$$

wobei die linke und die rechte Seite jeweils aus $m_{i,j}$ Buchstaben bestehen.
Eine *Artingruppe* ist eine Gruppe mit Präsentierung der folgenden Form:

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid b(m_{ij}) \; \forall i, j \rangle$$

Die Zopfrelation der Länge 3 lautet zum Beispiel $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$.

Wir haben hier ein bisschen mit der Notation gemogelt. Streng genommen sind Relationen Worte über $S^{\pm}$. Hier wollen wir aber eine Gleichheit von zwei gleich langen auf s_i und s_j alterierenden Worten betrachten. Wir teilen dazu für die Präsentierung aus der freien Gruppe über S die kleinste Normale Untergruppe raus in der die Worte jeweils gleich werden.

Aus den Definitionen erhalten wir: Artingruppen haben als Quotienten die Coxetergruppen in denen die zusätzlichen Relationen $s_i s_i$ gelten für alle Erzeuger s_i. D.h. zusätzlich zu den Zopfrelationen werden die Relationen $s_i s_i$ entsprechend den Konstanten m_{ii} herausgeteilt.

Beispiel 2.3.10 (Beispiele für Artingruppen)**.** Artingruppen interpolieren zwischen freien Gruppen und freien abelschen Gruppen.

1. Freie Gruppen sind Artingruppen in denen alle Zopfrelationen $b(m_{ij})$ trivial sind, d.h. es gilt $m_{ij} = \infty$ für alle i, j.

2. Freie abelsche Gruppen $\mathbb{Z}^n$ sind Artingruppen. Setze dazu $m_{ii} = \infty$ für alle i und $m_{ij} = 2$ für alle $i \neq j$.

3. *Rechtwinklige Artingruppen (RAAGs)* sind Artingruppen mit $m_{ij} \in \{2, \infty\}$ für alle i, j.

4. Alle Zopfgruppen B_n, $n \geq 1$ sind Artingruppen. Die Elemente in B_n sind n verknotete Stränge. Siehe Abbildung 2.9 (Mehr zur diagrammatischen Definition von Artingruppen mündlich).

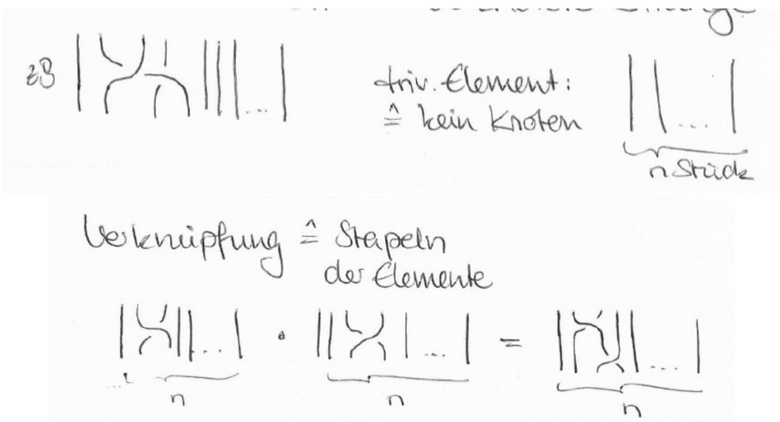

Abbildung 2.9: Visualisierung Zopfgruppen.

Im Rest des Kapitels gehen wir der Frage nach wie viele verschiedene endlich präsentierte Gruppen es bis auf Isomorphie überhaupt geben kann. Eine Antwort liefert am Ende Theorem 2.3.13.

Proposition 2.3.11. *Es gibt eine 2-erzeugte Gruppe G, die überabzählbar viele, paarweise nicht-isomorphe normale Untergruppen hat.*

Beweisskizze. Betrachte die Gruppe $G := \langle s, t \mid R \rangle$ für die Relationsmenge

$$R := \{[[s, t^n s t^{-n}], s] \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{[[s, t^n s t^{-n}], t] \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Sei C die von der Menge $\{S_C := [s, t^n s t^{-n}] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ erzeugte Untergruppe von G.
Dann ist C zentral in G, d.h. alle Elemente in C sind invariant unter Konjugation mit s und t (und somit $g \in G$) nach Definition von R.
Man kann zeigen, dass $C \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$. Diese Summe enthält überabzählbar viele Untergruppen. Zum Beispiel ist für eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{Z}$ die von Einheitsvektoren zu dieser Teilmenge erzeugte Untergruppe in C enthalten. Jede solche Untergruppe ist aber normal in G, weil sie Untergruppe der zentralen Untergruppe C in G ist. □

Proposition 2.3.12. *Sei G endlich erzeugt. Dann sind äquivalent:*

1. *G enthält überabzählbar viele verschiedene normale Untergruppen.*
2. *G hat überabzählbar viele, paarweise nicht-isomorphe Quotienten.*

Beweis. Zu (1) $\Rightarrow$ (2): Wir zeigen $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$. Angenommen, G hat nur abzählbar viele paarweise verschiedene Quotienten. Sei Q so ein Quotient. Weil G endlich erzeugt ist, ist Q selbst abzählbar. Dann existieren nur abzählbar viele Homomorphismen $\varphi : G \to Q$. Diese abzählbar vielen Homomorphismen induzieren abzählbar viele normale Untergruppen $N = \ker(\phi)$ von G für die gilt ${}^{G}\!/_{N} \cong Q$. Die Gruppe G kann nur abzählbar viele verschiedene normale Untergruppen haben, wenn es nur abzählbar viele verschiedene Quotienten gibt, was im Widerspruch zur 1. Aussage steht.
Zu (2) $\Rightarrow$ (1): Zu jedem Quotienten Q von G gibt es eine natürliche Projektion $\varphi : G \to Q$ mit Kern $N := \ker(\varphi)$. Für paarweise verschiedene Q, Q' sind auch die normalen Untergruppen N, N' in G verschieden. Somit folgt der Satz. □

Theorem 2.3.13 (Anzahl 2-erzeugter Gruppen)**.** *Es gibt überabzählbar viele (Isomorphieklassen von) Gruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden.*

Beweis. Proposition 2.3.11 liefert uns eine Gruppe mit überabzählbar vielen normalen Untergruppen. Proposition 2.3.12 liefert dann zugehörige (verschiedene) Quotienten. Also gilt der Satz. □

Korollar 2.3.14 (Endlich erzeugte, nicht endlich präsentierte Gruppen). *Es gibt überabzählbar viele (Isomorphieklassen von) endlich erzeugten Gruppen, die nicht endlich präsentiert sind.*

Beweis. Es existieren nur abzählbar viele endliche Präsentierungen von Gruppen, da über jedem endlichen Erzeugendensystem nur abzählbar viele endliche Relationsmengen existieren. Mit Theorem 2.3.13 folgt die Behauptung. □