Geometrische Gruppentheorie

Prof. Dr. Petra Schwer

Universität Heidelberg, schwer@uni-heidelberg.de

Wintersemester 2025/26

Vorlesungsskript mit Übungen für ca 28 Vorlesungen á 90 Minuten.

Es wird keine Algebraische Topologie vorausgesetzt. Daher ist an einigen Stellen ein anderer Beweis oder eine leicht umständlichere Formulierung gewählt als es mit der Sprache von Fundamentalgruppen und Überlagerungen möglich wäre.

Kommentare und Hinweise gerne an **schwer@uni-heidelberg.de** schicken. Danke.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen über Gruppen

Gruppen und Räume sind die wesentlichen Objekte der geometrischen Gruppentheorie. In diesem Kapitel werden wir diese beiden Objekte einführen sowie die entsprechenden Grundlagen besprechen.

1.1 Gruppen als Symmetrien von Objekten

Die Kernidee der geometrischen Gruppentheorie ist die Untersuchung der Beziehungen zwischen algebraischen Strukturen, insbesondere Gruppen, und geometrischen Objekten, die wir hier ganz allgemein als Räume bezeichnen. In diesem Kurs werden wir Gruppen als Symmetrien von Räumen auffassen und sie aus dieser Perspektive heraus analysieren. Gruppen wirken als Symmetrien auf topologischen Räumen oder geometrischen Strukturen. Die Betrachtung geeigneter Räume und ihrer geometrischen Eigenschaften kann daher tiefere Einsichten in die algebraische Struktur der betrachteten Gruppen ermöglichen. Umgekehrt können wir algebraische Eigenschaften nutzen, um Aussagen über Räume mit entsprechenden Symmetrien zu machen. Die Geometrische Gruppentheorie nutzt dabei einerseits häufig Methoden der Geometrie oder der algebraischen Topologie und hat andererseits selbst vielfältige Anwendungen in und Verbindungen zu verschiedensten Bereichen der modernen Mathematik.
Betrachten wir als Motivation zunächst ein einfaches Beispiel.

Beispiel 1.1.1 (Symmetrien eines Würfels)**.** Betrachten wir den Einheitswürfel C in $\mathbb{R}^3$. Wollen wir über Symmetrien des Würfels sprechen, so müssen wir zunächst klären, was wir unter einer Symmetrie verstehen. Bei Symmetrien können wir grundsätzlich zwischen *orientierungserhaltenden* und *orientierungsumkehrenden* Symmetrien unterscheiden.
Eine *orientierungserhaltende Symmetrie des Würfels* ist eine Abbildung des Würfels auf sich selbst, die aus durchführbaren Bewegungen im Raum besteht. D.h. Hochheben, Drehen und deckungsgleich wieder Absetzen ist erlaubt, Abbildungen wie Spiegelungen sind jedoch nicht erlaubt. Diese würden zu weiteren, *orientierungsumkehrenden Symmetrien* führen.
Beispiele für orientierungserhaltende Symmetrien des Würfels sind die Rotationen entlang der in Abbildung 1.1 abgebildeten Rotationsachsen um die Winkel (von links nach rechts) $k \cdot \frac{\pi}{2}, k \cdot \pi$ oder $k \cdot \frac{2\pi}{3}$, für $k \in \mathbb{Z}$.
Wir können die Geometrie des Würfels nutzen, um die Anzahl der orientierungserhaltenden Symmetrien zu zählen. Dabei gibt es unter anderem die folgenden beiden Zählweisen:
<u>1. Zählweise:</u> Wir beobachten zunächst, dass jede Ecke 8 verschiedene Positionen einnehmen kann. Steht das Bild $f(v) = v'$ einer Ecke v fest, so bleiben für deren drei Nachbarn

noch drei Möglichkeiten, wie wir diese (orientierungserhaltend) auf die Nachbarn der Ecke v' abbilden können. Die Bilder dieser 4 Ecken (v und ihre drei Nachbarn) legen eine Symmetrie vollständig fest. Also gibt es insgesamt $8 * 3 = 24$ Symmetrien.
2. Zählweise: Jede Symmetrie vertauscht die 4 Diagonalen (d.h. Strecken zwischen gegenüberliegenden Ecken) des Würfels. Jede Vertauschung solcher Diagonalen liefert eine eindeutige Symmetrie des Würfels. Die orientierungserhlatenden Symmetrien des Würfels entsprechen daher gerade den Permutationen der 4 Diagonalen. Somit gibt es $4! = 24$ Symmetrien.

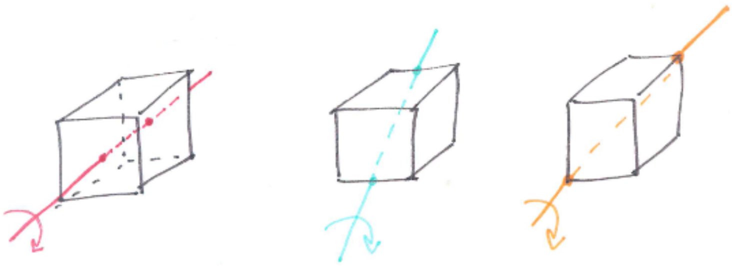


Abbildung 1.1: Symmetrieachsen des Würfels

Wir werden sehen, dass jede (endlich erzeugte) Gruppe die Symmetriegruppe eines geometrischen Objekts ist. Zur Erinnerung wiederholen wir hier einige wesentliche Definitionen im Kontext von Gruppen. Wir gehen jedoch davon aus, dass Ihnen diese bekannt und auch vertraut sind.

Definition 1.1.2 (Gruppen)**.** Eine *Gruppe* $(G, \cdot)$ ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$, sodass für alle $a, b, c \in G$ gilt:

1. Die Verknüpfung „$\cdot$" ist *assoziativ*: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
2. Es existiert ein *neutrales Element*[a] $\mathbb{1} \in G$ mit $\mathbb{1} \cdot a = a \cdot \mathbb{1} = a$.
3. Es existieren *Inverse* $a^{-1} \in G$ mit $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = \mathbb{1}$.

Eine Teilmenge H von G heißt *Untergruppe*, falls H bzgl. der Einschränkung der Verknüpfung $\cdot$ auf $H \times H$ eine Gruppe ist und H bezüglich der eingeschränkten Verknüpfung abgeschlossen ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn für alle $g, h \in H$ auch $g \cdot h^{-1} \in H$ ist. Wir schreiben dann $H \leq G$.

[a]Wir schreiben $\mathbb{1}$ für das neutrale Element in einer Gruppe um es nicht mit den vielen Kanten in diversen Graphen zu verwechseln, die wir im Laufe des Kurses betrachten werden.

Beispiel 1.1.3. Einige erste Beispiele von Gruppen sind:

1. Die ganzen, rationalen und reellen Zahlen $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$ jeweils mit Addition als Verknüpfnug.

2. Die (multiplikativen) Einheitengruppen $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die *symmetrische Gruppe* $\mathrm{Sym}(n)$, gegeben durch die Menge der Permutationen
$$\{f: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid f \text{ bijektiv}\}$$
mit der Verknüpfung „$\circ$“, der Komposition von Abbildungen. Allgemeiner bezeichne mit $\mathrm{Sym}(X)$ für eine beliebige (auch unendliche) Menge X die *symmetrische Gruppe über* X, d.h. die Gruppe der Bijektionen von X auf X bzgl. der üblichen Verknüpfung von Abbildungen.

4. Die Menge $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ist Gruppe bezüglich der komponentenweisen Verknüpfung
$$(m, n) \cdot (m', n') := (m + m', n + n').$$

Definition 1.1.4 (Homomorphismus)**.** Seien $(G, \bullet)$ und $(H, \circ)$ Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt *Homomorphismus*, falls für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt:
$$\varphi(g_1 \bullet g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2).$$
Ein Homomorphismus heißt *Isomorphismus*, wenn er bijektiv ist. Existiert ein Isomorphismus zwischen G und H, so schreiben wir $G \cong H$ und sagen, dass diese Gruppen *isomorph* zueinander sind.

Für einen Homomorphismus φ gilt $\varphi(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H$.
Ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn ein *inverser* Homomorphismus $\varphi^{-1} : H \to G$ existiert, sodass gilt:
$$\varphi^{-1} \circ \varphi = id_G \text{ und } \varphi \circ \varphi^{-1} = id_H.$$

Beispiel 1.1.5. Wir betrachten einige Beispiele zu Homomorphismen:

1. Die Abbildung $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +) : \ z \mapsto n \cdot z$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Homomorphismus. Sie ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $n = 1$.

2. Die Abbildung $\psi_n : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +) : \ z \mapsto n + z$ ist für kein $n \in \mathbb{N}$ ein Homomorphismus.

3. Die Abbildung $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) : t \mapsto e^t$ ist Isomorphismus mit log als inverse Abbildung.

4. Für Untergruppen $H \leq G$ ist die Inklusionsabbildung $i : H \hookrightarrow G$ ein Homomorphismus.

Eins der ersten schönen Resultate, das man ohne viel Theorie beweisen kann, ist der Satz von Cayley.

Theorem 1.1.6 (Satz von Cayley)**.** *Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.*

Beweis. Sei G eine beliebige Gruppe. Setze $H := \mathrm{Sym}(|G|)$ (siehe Beispiel 1.1.3 3), wobei G als Menge aufgefasst wird. Definiere eine Abbildung

$$\psi : G \to H \text{ durch } g \mapsto f_g,$$

wobei die Abbildung f_g definiert ist durch $f_g(x) := g \cdot x$ für alle $x \in G$. Dann gilt für alle $g, h \in G$, dass

$$\psi(gh)(x) = f_{gh}(x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = f_g(f_h(x)) = (f_g \circ f_h)(x).$$

Es gilt also $f_g \circ f_h = f_{g \cdot h}$. Die inverse Abbildung zu f_g ist $f_{g^{-1}}$. Das neutrale Element in H ist die Identitätsabbildung auf G, die das Bild des neutralen Elements $e_G \in G$ unter ψ ist. Wie oben gezeigt, ist $\psi : G \to H$ also ein Gruppenhomomorphismus. Angenommen, es gelte $\psi(g) = f_{e_G}$ für ein $g \in G$. Das impliziert $g \cdot h = h$ für alle $h \in H$. Also ergibt sich $g = e_G$ und deshalb auch, dass ψ injektiv ist. $\square$

Um alle Elemente einer (unendlichen) Gruppe zu beschreiben, genügen manchmal endlich viele Elemente und deren Verknüpfungen.

Definition 1.1.7 (Erzeugendensystem)**.** Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Teilmenge.

1. Die *von S erzeugte Untergruppe* $\langle S \rangle$ ist die kleinste Untergruppe von G, die S enthält.
2. Die Menge S heißt *Erzeugendensystem* von G, wenn $G = \langle S \rangle$ gilt.
3. Die Gruppe G heißt *endlich erzeugt*, wenn eine endliche Teilmenge $S \subseteq G$ existiert, die G erzeugt. Wir nennen G k-erzeugt, wenn es ein k-elementiges Erzeugendensystem für G gibt.

Die leere Menge $\varnothing$ *erzeugt* die triviale Gruppe $\{\mathbb{1}\}$.

Wir schreiben manchmal $\mathbb{1}$ statt $\{\mathbb{1}\}$ für die triviale Gruppe (und missbrauchen dabei ein kleines bisschen die Notation).

Beispiel 1.1.8. Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist endlich erzeugt. Erzeugendensysteme sind zum Beispiel die Menge $\{1\}$ oder $\{2, 3\}$ oder beliebige andere Teilmengen mit denen sich die 1 schreiben lässt. Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ oder auch $(\mathbb{R}, +)$ ist dagegen nicht endlich erzeugt.

> **Definition 1.1.9** (Diedergruppen)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ bezeichnen wir die Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks als (endliche) *Diedergruppe* D_n.
> Das bedeutet, dass D_n die Menge aller Isometrien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist, die die Eckenmenge eines in $\mathbb{R}^2$ eingebetteten, regulären n-Ecks auf sich selbst abbildet. Die Diedergruppe D_n hat $2n$ Elemente.

Abbildung 1.2 zeigt verschiedene n-Ecke mit Spiegelungsachsen (türkis und lila). Die gelben Pfeile illustrieren die möglichen Rotationen um den Mittelpunkt m des n-Ecks um Vielfache des Winkels $\frac{2\pi}{n}$.

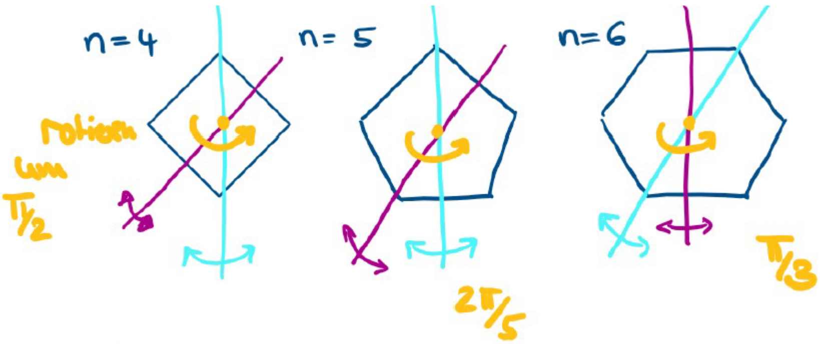


Abbildung 1.2: n-Ecke mit Spiegelungsachsen und Rotationen

> **Lemma 1.1.10.** *Alle Diedergruppen $D_n, n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, sind 2-erzeugt.*

Beweis. Sei P_n ein reguläres n-gon mit Zentrum m. Eine Diagonale in P_n ist eine Gerade durch m und eine Ecke v von P_n.
Sei v nun eine fest gewählte Ecke und s_v die Spiegelung an der Diagonalen durch m und v. Weiter sei ρ die Rotation um m mit Winkel $\frac{2\pi}{n}$. Wir zeigen, dass D_n von der Menge $S = \{s_v, \rho\}$ erzeugt wird.
Sei f ein beliebiges Element aus D_n. Dann bildet f die Ecke v auf eine Ecke $f(v)$ ab. Es existiert dann ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $f(v) = \rho^k(v)$, d.h. $f(v)$ is Bild von v unter k-fachem Anwenden von ρ. Bezeichne nun mit u einen der Nachbarn von v in P_n.

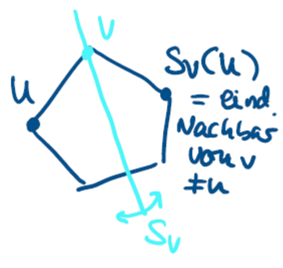


Abbildung 1.3: Spiegelung von u durch s_v.

Für das Bild von u unter f gibt es zwei Möglichkeiten. Ist $\rho^k(u) = f(u)$, dann ist $f = \rho^k$, da $f \circ \rho^{-1}$ die Kante $\{u, v\}$ und somit das n-Eck fixiert. Andernfalls, wenn $\rho^k(u) \neq f(u)$, ist $\rho^k \circ \underbrace{s_v(v)}_{=v} = f(v)$ und $\rho^k \circ \underbrace{s_v(u)}_{\neq u} = f(u)$ und somit $f = \rho^k \circ s_v$.

In beiden Fällen lässt sich f mit ρ und s_v ausdrücken. Da f beliebig gewählt war erhalten wir $D_n = \langle\{s_v, \rho\}\rangle$. $\square$

1.2 Neue Gruppen aus alten

Um möglichst interessante Beispiele betrachten und vielfältige Gruppen untersuchen zu können, brauchen wir Methoden zur Konstruktion sowie zur Darstellung von Gruppen. Eine Möglichkeit ist es, neue Gruppen aus bereits bekannten Gruppen zu „bauen“. Dieses Kapitel behandelt die wesentlichen solcher Konstruktionen.

Definition 1.2.1 (Faktorgruppe)**.** Sei N eine normale Untergruppen in G (abgekürzt $N \trianglelefteq G$). Dann ist die Menge aller Nebenklassen gN von N in G eine Gruppe, genannt *Faktorgruppe* oder *Quotient von G bezüglich N*, notiert mit ${}^{G}\!/_{N}$.

Proposition 1.2.2. *Sei nun $N \trianglelefteq G$. Dann hat ${}^{G}\!/_{N}$ bezüglich der Projektion $\pi : G \to {}^{G}\!/_{N}$ mit $g \mapsto gN$ folgende* universelle Eigenschaft*:*
Für alle Gruppen H und für alle Homomorphismen $\varphi : G \to H$ mit $N \subseteq \ker(\varphi)$ existiert genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : {}^{G}\!/_{N} \to H$ mit $\varphi \circ \pi = \bar{\varphi}$.

Die Aussage in Proposition 1.2.2 sagt gerade, dass das Diagramm in Abbildung 1.4 kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \\
{}^{G}\!/_{N} \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \bar{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1.4: Kommutatives Diagramm zur universellen Eigenschaft von Faktorgruppen von G bezüglich einer normalen Untergruppe N.

Definition 1.2.3 (Direktes Produkt)**.** Sei I eine Indexmenge und $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Das *direkte Produkt* $\prod_{i\in I} G_i$ ist die Gruppe, die als Grundmenge das karthesische Produkt der Gruppen G_i hat und als Verknüpfung die komponentenweise Verkettung gegeben durch

$$((g_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I}) \mapsto (g_i \cdot h_i)_{i\in I}.$$

Das direkte Produkt zweier Gruppen ist eine Erweiterung des zweiten Faktors durch den ersten im Sinne von Definition 1.2.5. Nicht jede Erweiterung ist ein direktes Produkt.

Definition 1.2.4 (Semidirektes Produkt)**.** Seien N und Q Gruppen und sei $\varphi : Q \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Das *semidirekte Produkt von Q mit N bezüglich φ* ist die Gruppe $N \rtimes_\varphi Q$, die als Grundmenge $N \times Q$ hat und deren Verknüpfung gegeben ist durch

$$((n,p),(m,q)) \mapsto (n\ \varphi(p)(m), pq),$$

wobei $\varphi(p) \in \mathrm{Aut}(N)$ gilt.

Diedergruppen lassen sich zum Beispiel als semidirekte Produkte schreiben, siehe dazu Übungsaufgabe 6.1.1.

Definition 1.2.5 (Gruppenerweiterung)**.** Es seien zwei Gruppen Q und N gegeben. Eine Gruppe G is eine *Erweiterung von Q durch N* wenn es eine injektive Abbildung $\iota : N \hookrightarrow G$ und eine surjektive Abbildung $\pi : G \twoheadrightarrow Q$ gibt, sodass folgende Sequenz exakt ist:

$$\mathbb{1} \to N \underset{\iota}{\hookrightarrow} G \underset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q \to \mathbb{1}.$$

Das kartesische Produkt $G \times H$ mit der Inklusionsabbildung $\iota : H \hookrightarrow G \times H$ und der Projektion $\pi : G \times H \twoheadrightarrow G$ bezeichnen wir auch als *triviale Erweiterung* von G durch H.

Lemma 1.2.6. *Sei G eine Erweiterung von Q durch N. Dann gilt*

1. *N ist ein Normalteiler von G.*
2. *Q ist isomorph zum Quotienten ${}^{G}\!/_{N}$.*

Spezielle Klassen von Erweiterungen sind die oben eingeführten direkten und semidirekten Produkte. Eine Erweiterung G von Q ist genau dann ein semi-direktes Produkt, wenn ein Homomorphismus $\phi : Q \to G$ mit $\pi \circ \phi = \mathbb{1}_Q$ existiert.

1.3 Gruppenwirkungen und Graphen

In diesem Kapitel präzisieren wir die Idee von Gruppen als Mengen von Symmetrien und führen dazu Gruppenwirkungen ein.
Hierzu betrachten wir bestimmte Räume und ihre Automorphismengruppen, also ihre Symmetrien. Beispiele solcher Räume sind Graphen, metrische Räume, Vektorräume, Simplizial- oder polyedrische Komplexe, Mannigfaltigkeiten oder topologische Räume.

Wir werden uns in diesem Kapitel auf Graphen und im Speziellen auf sogenannte Cayleygraphen konzentrieren. Das sind Räume, die einer Gruppe zugeordnet werden können, auf denen die Gruppe selbst wirkt und die somit die Struktur der Gruppe beschreiben.

Definition 1.3.1 (Gruppenwirkung)**.** Sei G eine Gruppe und X ein Raum[1]. Eine *Wirkung von G auf X* ist ein Homomorphismus $\lambda : G \to \mathrm{Aut}(X)$. Abkürzend schreiben wir $G \overset{\lambda}{\curvearrowright} X$ oder nur $G \curvearrowright X$.

Bemerkung 1.3.2.

1. Eine Wirkung ist also eine Familie $(f_g)_{g \in G}$ von Automorphismen $f_g : X \to X$, wobei für alle $g, h \in G$ gilt:
$$f_g \circ f_h = f_{gh} \text{ und } f_{e_G} = id_X.$$
2. Wir können eine Wirkung auch als Abbildung
$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$
schreiben, wobei für alle $g, h \in G$ und für alle $x \in X$ gilt:
$$(gh).x = g.(h.x) \text{ und } e_G.x = x.$$

Wir werden diese Betrachtungsweisen austauschbar verwenden.

Beispiel 1.3.3. Schauen wir uns einige Beispiele für Gruppenwirkungen an.

1. Jede beliebige Gruppe G hat auf jedem Raum X die *triviale Wirkung*, gegeben durch
$$\begin{aligned} G &\to \mathrm{Aut}(X) \\ g &\mapsto id_X \end{aligned}$$
für alle $g \in G$. Diese Wirkung ist meist nicht von weiterem Interesse.
2. Die Automorphismengruppe $G := \mathrm{Aut}(X)$ eines Raumes X wirkt kanonisch auf X durch die Identitätsabbildung
$$id_{\mathrm{Aut}(X)} : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(X).$$
Das Konzept der Gruppenwirkungen verallgemeinert also das der Automorphismus- und Symmetriegruppen.
3. Die Diedergruppe D_n wirkt auf der Menge der Ecken, Kannten und Diagonalen eines regulären n-Ecks.

[1]Ein Objekt in einer kleinen Kategorie $\mathcal{C}$, d.h. $\mathrm{Mor}(X, Y)$ ist eine Menge für alle $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

4. Für einen festen Drehwinkel wirken die ganzen Zahlen auf dem Einheitskreis durch Rotation um ganze Vielfache des Drehwinkels.
Sei dazu $\theta \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Gruppe $G := \mathbb{Z}$ und den Raum $X := \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Dann wirkt G auf X durch
$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ (n, z) &\mapsto e^{2\pi\theta \cdot n} \cdot z, \end{aligned}$$
da $(0, z) \mapsto z$ und $f(n+m, z) = e^{2\pi\theta\cdot(n+m)} = f(n, f(m, z))$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt. Dabei ist $0 = e_{\mathbb{Z}}$. Die Wirkung entspricht der Rotation um Vielfache des Winkels $2\pi\theta$.
Es gilt also $\mathbb{Z} \overset{f}{\curvearrowright} \mathbb{S}^1$.

5. Die ganzen Zahlen wirken außerdem auf den reellen Zahlen durch Translation.
Wir betrachten also die Gruppe $G := \mathbb{Z}$ und den Raum $X := \mathbb{R}$. Dann wirkt G auf X durch
$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (n, x) &\mapsto n + x, \end{aligned}$$
da $(0, x) \mapsto x$ und $g(n + m, x) = n + m + x = n + g(m, x) = g(n, g(m, x))$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt.
Es gilt also $\mathbb{Z} \overset{g}{\curvearrowright} \mathbb{R}$.

6. Jede Gruppe wirkt auf verschiedene Weisen auf sich selbst. Die Gruppe G fungiert dann sowohl als Menge der Symmetrien als auch als Raum. Beispiele sind die triviale Wirkung sowie die
   - Links-Multiplikationswirkung: $G \curvearrowright G$ via $(g, h) \mapsto g \cdot h$,
   - Konjugationswirkung: $G \curvearrowright G$ via $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$.

Definition 1.3.4 (Stabilisator und Orbit)**.** Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Der *Stabilisator* eines Elements $x \in X$ unter G ist die Menge $\mathrm{Stab}_G(x)$ der Gruppenelemente, die x fixieren, d.h.
$$\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid g.x = x\}.$$
Der *Orbit* oder die *Bahn* $G.x$ eines Elements $x \in X$ unter G ist die Menge aller $y \in X$, sodass ein $g \in G$ existiert mit $g.x = y$, d.h.
$$G.x := \{y \in X \mid \exists\ g \in G \text{ mit } g.x = y\}.$$

Definition 1.3.5 (Eigenschaften von Wirkungen)**.** Eine Wirkung λ einer Gruppe G auf einer Menge X heißt

1. *frei*, falls $g.x \neq x$ für alle $x \in X$ und alle $g \in G \setminus \{\mathbb{1}_G\}$.
   Eine Gruppenwirkung ist genau dann frei, wenn $\mathrm{Stab}_G(x) = \{\mathbb{1}_G\}$ für alle $x \in X$ gilt.

2. *treu*, falls $\lambda : G \to \mathrm{Aut}(X)$ injektiv ist.
   Eine Gruppenwirkung ist genau dann treu, wenn für alle $g \in G \setminus \{\mathbb{1}_G\}$ ein $x \in X$ existiert mit $g.x \neq x$.

3. *transitiv*, falls $G.x = X$ für alle $x \in X$ gilt.
   Eine Gruppenwirkung ist genau dann transitiv, wenn für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ existiert mit $g.x = y$.

Beispiel 1.3.6. Wir überprüfen nun einige der Gruppenwirkungen aus Beispiel 1.3.3 auf ihre Eigenschaften:

1. Die Linksmultiplikationswirkung von G auf sich selbst ist frei, treu und transitiv.

2. Die Konjugationswirkung von G auf sich selbst ist im Allgemeinen weder frei, noch treu, noch transitiv.

3. Die Rotationswirkung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{S}^1$ um ganzzahlige Vielfache eines Drehwinkels $2\pi\theta$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ ist:
   - frei, genau dann, wenn $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
   - treu, genau dann, wenn sie frei ist, und
   - für alle $\theta \in \mathbb{R}$ nicht transitiv.

4. Die Wirkung der vollen Isometriegruppe $\mathrm{Iso}(\mathbb{S}^1)$ auf $\mathbb{S}^1$ ist transitiv aber nicht frei, da Spiegelungen des Kreises Fixpunkte haben.

Eine wichtige Beispielklasse von Räumen, auf denen wir Gruppenwirkungen betrachten wollen, sind Graphen. Wir werden Graphen einführen, die uns ein Bild einer Gruppe bezüglich eines gegebenen Erzeugendensystems liefern: sogenannte Cayley-Graphen. Daher wiederholen wir hier nochmal in Kürze die wichtigsten Begriffe.

Definition 1.3.7 (Graphen)**.** Ein *Graph* ist ein Tripel $\Gamma = (V, E, \delta)$ von Mengen V und E und einer *Randabbildung* $\delta : E \to \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$. Die Elemente $v \in V$ nennen wir *Ecken* und ein $e \in E$ heißt *Kante* von Γ. Die Elemente in $\delta(e)$, dem Bild der Kante $e \in E$ unter der Randabbildung, nennen wir auch die *Ecken* oder *Enden* der Kante e.

Definition 1.3.8 (Gerichtete Graphen)**.** Fixieren wir zu jeder Kante $e \in E$ eine Ordnung auf dem Bild $\delta(e) = \{v_1, v_2\}$ nennen wir den Graphen *gerichtet* oder *orientiert*. Eine Kanten e mit $\delta(e) = \{v_1, v_2\}$ und Orientierung „v_2 vor v_1“ schreiben wir dann üblicherweise als geordnetes Tupel (v_2, v_1).

Kanten stellen wir üblicherweise als Linie zwischen ihren Ecken dar. Betrachten wir gerichtete Graphen, so notieren wir die Orientierung als Pfeil auf der Linie, die vom ersten zum zweiten Element in der Ordnung zeigt.
Wir werden im Folgenden auch oft statt 'Kante e' einfach das gordnete oder ungeordnete Paar ihrer Ecken notieren, also (u, v) und $\{u, v\}$. Das ist insbesondere dann sinnvoll, wenn es sich um Graphen ohne Doppelkanten handelt.

Beispiel 1.3.9. Graphen können (ungerichtet) übereinstimmen, sich aber als gerichtete Graphen voneinander unterscheiden. Die folgenden Graphen sind solche Beipiele:

Definition 1.3.10 (Schleifen und Doppekanten)**.** Sei $\Gamma = (V, E, \delta)$ ein Graph. Eine *Schleife* in Γ ist eine Kante $e \in E$ mit $\delta(e) = \{v\}$ für ein $v \in V$.
Eine Paar von Kanten $e, e' \in E$ heißt *Doppelkante* wenn $\delta(e) = \delta(e')$.

Definition 1.3.11 (Wege in Graphen)**.** Sei $\Gamma = (V, E, \delta)$ ein Graph.

1. Ein *Kantenzug* p der Länge n in Γ ist eine Folge von Ecken $v_i \in V, i = 0 \dots n$ und Kanten $e_i \in E$, $i = 1 \dots n$, sodass für alle $i \in \{1 \dots, n\}$ gilt $\delta(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$.

2. Wir nennen einen Kantenzug einen *Pfad*, wenn all seine Ecken paarweise verschieden sind.

3. Ein *Unterkantenzug* p' eines Kantenzugs p ist eine Teilmenge der Ecken v_i und zugehörigen Kanten in p mit Indizes in einer Menge der Form $\{i, \dots, k\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Es handelt sich um einen *Unterpfad* wenn p' selbst ein Pfad ist.

4. Ein *Kreis* (oder *Zykel*) ist ein Kantenzug $v_0, \dots, v_n$ für den gilt: $v_0 = v_n$ und jeder echte Unterkantenzug ist ein Pfad.

Manchmal schreiben wir Kantenzüge manchmal auch nur als Eckenfolge in der aufeinanderfolgende Ecken durch eine Kante verbunden sind.
Beispiele für die Begriffe in Definition 1.3.11 sind in Abbildung 1.5 zu sehen.

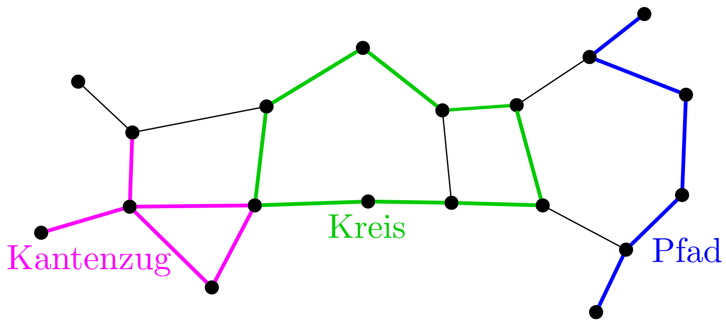


Abbildung 1.5: Ein Graph mit markiertem Kantenzug, Kreis und Pfad.

Definition 1.3.12 (Bäume)**.** Sei $\Gamma = (V, E, \delta)$ ein Graph. Wir sagen Γ ist *simplizial*, wenn weder Schleifen noch Doppelkanten in Γ existieren.
Ein *Baum* ist ein simplizialer Graph ohne Kreise.

Definition 1.3.13 (Ecken-Grad, Blätter)**.** Sei $\Gamma = (V, E, \delta)$ ein Graph.

1. Der *Grad* einer Ecke ist die Anzahl seiner Nachbarn, d.h. die Anzahl aller Ecken $v' \neq v$, für die es eine Kante $e \in E$ gibt mit $\delta(e) = \{v, v'\}$.
2. Eine Ecke $v \in V$ von Grad 1 nennen wir *Blatt*.
3. Ein Graph ist *regulär*, wenn jede Ecke den selben Grad hat.

Lemma 1.3.14 (Charakterisierung von Bäumen)**.** *Ein zusammenhängender, simplizialer Graph mit mindestens zwei Ecken ist genau dann ein Baum, wenn es zu je zwei Ecken genau einen verbindenden Pfad gibt.*

Beweis. Siehe Übungsaufgabe 6.1.2. □

Definition 1.3.15 (Morphismen von Graphen)**.** Seien zwei Graphen $\Gamma = (V, E, \delta)$ und $\Gamma' = (V', E', \delta')$ gegeben. Ein *Morphismus* $f : \Gamma \to \Gamma'$ ist ein Paar von Abbildungen $f_V : V \to V'$ und $f_E : E \to E'$ mit

$$\delta' \circ f_E = (f_V * f_V) \circ \delta.$$

Ein *Isomorphismus* ist ein Morphismus f, zu dem ein Morphismus $f^{-1} : \Gamma' \to \Gamma$ existiert mit
$$f' \circ f = id_\Gamma \quad \text{und} \quad f \circ f' = id_{\Gamma'}.$$

Somit können wir für einen Graphen Γ die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ definieren und folglich auch Gruppenwirkungen auf Graphen betrachten.

Definition 1.3.16 (Gruppenwirkungen auf Graphen)**.** Sei G eine Gruppe und sei $\Gamma = (V, E, \delta)$ ein Graph. Eine Wirkung von G auf Γ ist ein Homomorphismus $\lambda : G \to \operatorname{Aut}\Gamma$.

Bemerkung 1.3.17. Etwas konkreter sehen Wirkungen auf Graphen wie folgt aus:

1. Eine Wirkung von G auf Γ ist durch eine Familie $(f_g)_{g\in G}$ von Automorphismen von Γ gegeben, die durch Gruppenelemente indiziert ist und für die gilt:
   - Für alle $g \in G$ ist $f_g = (f_g^V, f_g^E)$ mit $f_g^V : V \to V$ und $f_g^E : E \to E$.
   - Beide Abbildungen erfüllen die Gleichungen aus 1 in Bemerkung 1.3.2.

   Zusätzlich gilt: Für eine Kante $e \in E$ mit $\delta(e) = \{u, v\}$ gilt
   $$\delta(f_g^E(e)) = \{f_g^V(u), f_g^V(v)\}.$$
   Das nennen wir auch „Verträglichkeit mit der Randabbildung".

2. Als Abbildungen geschrieben haben wir ein Paar
   $$\begin{aligned} \lambda_V &: G \times V \longrightarrow V : (g, v) \longmapsto g.v = \lambda_V(g)(v), \text{ und} \\ \lambda_E &: G \times E \longrightarrow E : (g, e) \longmapsto g.e = \lambda_E(g)(e), \end{aligned}$$
   wobei die Eigenschaft 2 aus Bemerkung 1.3.2 gilt.
   Zusätzlich ist für eine Kante $e \in E$ mit $\delta(e) = \{u, v\}$ das Bild der Randabbildung wie folgt gegeben:
   $$\delta(\lambda_E(g)(e)) = \{\lambda_V(g)(u), \lambda_V(g)(v)\}.$$

Definition 1.3.18 (Freie Wirkungen auf Graphen)**.** Eine Wirkung von G auf $\Gamma = (V, E, \delta)$ heißt *frei*, wenn λ_E und λ_V frei sind. Das heißt, wenn für alle $g \in G \setminus \{e_G\}$ gilt:

(i) Die Abbildung $\lambda_V(g)$ ist *fixpunktfrei*, d.h. für alle $v \in V$ ist $(\lambda_V(g))(v) \neq v$.

(ii) Die Abbildung $\lambda_E(g)$ ist *inversionsfrei*, d.h. für alle $e \in E$ ist $(\lambda_E(g))(e) \neq e$.

Wie bereits angedeutet, kann es hilfreich sein, eine Gruppe selbst als Raum aufzufassen bzw. ihr einen Raum zuzuordnen, auf dem sie wirkt. Hierzu wollen wir nun einer Gruppe einen Graphen zuordnen, den sogenannten Cayleygraphen. Diese Zuordnung geschieht in Abhängigkeit von der Wahl eines Erzeugendensystems, ist also nicht eindeutig. Dennoch können wir diesen Graphen als ein mögliches Bild der Gruppe verstehen, ihn geometrisch untersuchen und folglich die Eigenschaften der Gruppe untersuchen, indem wir die Eigenschaften des Graphen untersuchen.

Definition 1.3.19 (Cayleygraphen)**.** Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem mit $\mathbb{1}_G \notin S$.

1. Der *(ungerichtete) Cayleygraph*[a] $\mathrm{Cay}(G,S)$ *von* G *bezüglich* S ist der Graph mit Eckenmenge $V = G$ und Kantenmenge $E = \{\{g, gs\} \mid g \in G,\ s \in S\}$.

2. Der *gerichtete Cayleygraph* $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ *von* G *bezüglich* S ist der Graph mit Eckenmenge $V = G$ und Kantenmenge $E = \{(g, gs) \mid g \in G,\ s \in S\}$, wobei (g, gs) die gerichtete Kante von g nach gs beschreibt. Wir beschriften die Kante (g, gs) optional mit s.

[a] Cayleygraphen wurden ursprünglich unter dem Begriff *Gruppenbild* von Max Dehn eingeführt.

Cayleygraphen zu verschiedenen Erzeugendensystemen sind im Allgemeinen verschieden. Es gibt zu einer Gruppe also mehrere Cayleygraphen. Siehe dazu auch Beispiel 1.3.21.

Bemerkung 1.3.20. Der ungerichtete Cayleygraph $\mathrm{Cay}(G,S)$ stimmt nicht in allen Fällen mit dem gerichteten Cayleygraph $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ mit „vergessener“ Kantenorientierung überein. Betrachte dafür zum Beispiel die Gruppen G mit zwei Elementen $G = \{\mathbb{1}_G, s\}$ für die gelte $s^2 = \mathbb{1}_G$. Als Erzeugendensystem betrachte einfach die einelementige Menge $S = \{s\}$. Dann sind $\mathrm{Cay}(G,S)$ und $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ verschieden, siehe Abbildung 1.6.

(a) $\mathrm{Cay}(G,S)$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$

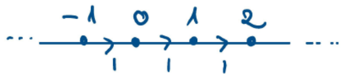
Abbildung 1.6: Gerichteter und ungerichteter Cayleygraph für G aus Bemerkung 1.3.20.

Beispiel 1.3.21. Unterschiedliche Erzeugendensysteme der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ergeben verschiedene (gerichtete) Cayleygraphen.

1. Für das einfachste Erzeugendensystem $S = \{1\}$ sieht der Cayleygraph einem Zahlenstrahl ähnlich. Hier gibt es keine Doppelkanten und $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, S)$ stimmt mit dem zugrundeliegenden Graphen des gerichteten Cayleygraphens $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbb{Z}, S)$ überein, siehe Abbildung 1.7a.

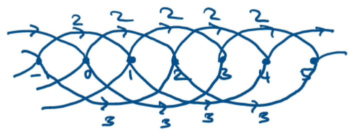
2. Für das Erzeugendensystem $S = \{-1, 1\}$ von $\mathbb{Z}$ ergibt sich ein anderes Bild: durch den zweiten Erzeuger entstehen Doppelkanten, siehe Abbildung 1.7b.

3. Der (gerichtete) Cayleygraph von $\mathbb{Z}$ bezüglich $S = \{2, 3\}$ sieht schon viel komplizierter aus, da sowohl Ecken, die sich um Wert 2 unterscheiden als auch solche mit Differenz 3 mit einer Kante verbunden werden. Vergleiche dazu Abbildung 1.7c.



(a) $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbb{Z}, \{1\})$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbb{Z}, \{-1, 1\})$



(c) $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$

Abbildung 1.7: Cayleygraphen von $\mathbb{Z}$ für verschiedene Erzeugendensysteme.

Beispiel 1.3.22. Hier zwei weitere Beispiele für Cayleygraphen:

1. Betrachte die symmetrische Gruppe $G = \mathrm{Sym}(3)$ erzeugt von den elementaren Transpositionen $(1, 2)$ und $(2, 3)$, die die Einträge 1 und 2 bzw 2 und 3 vertauschen. Dann ist der Cayleygraph von G bezüglich $S = \{(1, 2), (2, 3)\}$ ein Sechseck mit Doppelkanten, siehe Abbildung 1.8.

2. Für eine beliebige Gruppe G ist $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, G \setminus \{\mathbb{1}_G\})$ der doppelt vollständige Graph auf $|G|$ Ecken mit Kanten wie in Abbildung 1.9 für $g, h \in G$.

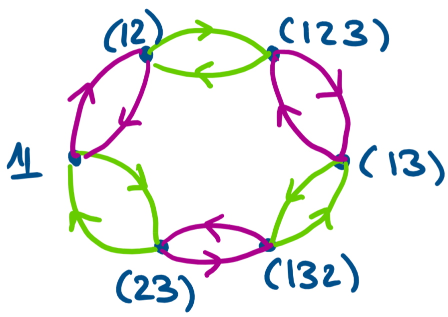


Abbildung 1.8: Der gerichtete Cayleygraph von $\mathrm{Sym}(3)$ bezüglich $\{(1, 2), (2, 3)\}$ mit gleichfarbigen Doppelkanten. Rote Kanten entsprechen $(1, 2)$ und grüne Kanten entprechen $(2, 3)$.

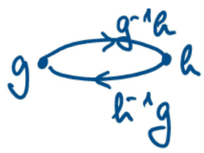


Abbildung 1.9: Doppelte Kanten im vollständigen Graphen über $|G|$ Ecken.

Theorem 1.3.23 (Eigenschaften von Cayleygraphen)**.** *Sei G eine Gruppe mit Erzeugendensystem S. Dann gilt:*

1. $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ *und* $\mathrm{Cay}(G,S)$ *sind zusammenhängend und schleifenfei.*
2. $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ *und* $\mathrm{Cay}(G,S)$ *sind regulär.*
3. $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ *und* $\mathrm{Cay}(G,S)$ *sind genau dann lokal endlich (d.h. alle Eckengrade sind endlich), wenn S endlich ist.*
4. $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ *besitzt genau dann Doppelkanten, wenn (mindestens) ein $s \in S$ mit $s^{-1} \in S$ existiert.*
5. $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ *ist genau dann simplizial, wenn $S \cap S^{-1} = \varnothing$.*

Beweis. Diese Eigenschaften folgen leicht aus der Definition der Cayleygraphen und den genannten Eigenschaften des jeweiligen Erzeugendensystems. □

Beispiel 1.3.24 (Linkstranslationswirkung auf Cayleygraphen)**.** Die Linskmultiplikation innerhalb einer Gruppe G induziert eine Wirkung von G auf dem (gerichteten) Cayleygraphen $\mathrm{Cay}(G,S)$ bzw. $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ durch die Abbildungen

$$\begin{aligned} f_g^V : V &\to V \\ v &\mapsto gv \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} f_g^E : E &\to E \\ (u,v) &\mapsto (gu,gv) \end{aligned}$$

für jedes $g \in G$.
Nach der Konstruktion des Cayleygraphen gilt für $(u,v) \in E$, dass $v = u \cdot s$ für ein $s \in S$ ist. Somit folgt $f_g^V(u) = gu$ und $f_g^V(us) = gus = gv$, die Wirkung ist also wohldefiniert. Die Wirkung heißt *Linkstranslation von G auf* $\mathrm{Cay}(G,S)$ bzw. auf $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$.

Mit Cayleygraphen haben wir jede endlich erzeugte Gruppe als Symmetriegruppe eines gerichteten Graphen realisiert:

Theorem 1.3.25 (Jede Gruppe ist Symmetriegruppe ihres Cayleygraphen)**.** *Sei G Gruppe mit beliebigem, endlichen Erzeugendensystem S von G. Dann ist die Linkstranslationswirkung von G auf* $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ *ein Isomorphismus von G nach* $\mathrm{Aut}(\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S))$.

Lassen Sie mich kurz daran erinnern, dass für ein Element $g \in G$ die *Ordnung von g* definiert ist durch $\mathrm{ord}(g) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid g^n = \mathbb{1}_G\}$.

Theorem 1.3.26 (Charakterisierung: freie Linkstranslationswirkung)**.** *Sei G von S erzeugt. Die Linksmultiplikationswirkung von G auf* $\mathrm{Cay}(G,S)$ *ist genau dann frei, wenn S keine Elemente der Ordnung 2 enthält.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass die Wirkung frei sei. Wäre $s \in S$ von Ordnung 2, dann fixiert s unter der Linkstranslation die Kante $\{\mathbb{1}_G, s\}$ in $\mathrm{Cay}(G, S)$ was im Widerspruch zur Freiheit der Wirkung steht.
Nehmen wir nun umgekehrt an, dass es keine Elemente der Ordnung 2 in S gibt. Seien λ_V und λ_E die von der Linkstranslation induzierten Wirkungen auf V bzw. E in $\mathrm{Cay}(G, S)$. Dann ist λ_V fixpunktfrei, da die Linkstranslation gerade der Linksmultiplikation in $G = V$ entspricht. Bleibt zu zeigen, dass λ inversionsfrei ist.
Angenommen, es existiere ein $e \in E$ und ein $g \in G$ mit $L_g(e) := \lambda_E(g)(e) = e$. Insbesondere ist dann $L_g(\delta(e)) = \delta(L_g(e)) = \delta(e)$. Mit $\delta(e) = \{v, v'\}$ und $v' = vs$ für ein $s \in S$ folgt, dass $\{v, v'\} = \{gv, gv'\}$.
<u>1. Fall:</u> Ist $gv = v$, so auch $gv' = v'$ und $g = \mathbb{1}_G$, da λ_V fixpunktfrei wirkt und $\mathrm{Cay}(G, S)$ keine Doppelkanten hat, denn S enthält keine Elemente der Ordnung 2.
<u>2. Fall:</u> Ist $gv = v'$, so ist $gv' = v$, womit gilt:

$$v = gv' = g(vs) = (gv)s = v's = vs^2.$$

Da λ_V fixpunktfrei auf V wirkt, muss gelten $s^2 = \mathbb{1}_G$. Was im Widerspruch zur Annahme an S steht. Somit ist λ_E inversionsfrei und die Behauptung folgt. □

Bibliographie

[BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger.
Metric spaces of non-positive curvature, volume 319 of *Grundlehren Math. Wiss.*
Berlin: Springer, 1999.

[CM17] Matt Clay and Dan Margalit, editors.
Office hours with a geometric group theorist.
Princeton, NJ: Princeton University Press, 2017.

[Löh17] Clara Löh.
Geometric group theory. An introduction.
Universitext. Cham: Springer, 2017.

[Ros10] Stephan Rosebrock.
Geometrische Gruppentheorie. Ein Einstieg mit dem Computer. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht.
Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2nd corrected and updated edition edition, 2010.