



**UNIVERSITÄT
HEIDELBERG**
ZUKUNFT
SEIT 1386

SKRIPT ZUR VORLESUNG **FUNKTIONENTHEORIE I**

gehalten an der
Universität Heidelberg
im
Sommersemester 2025
von
Johannes Walcher

INHALTSVERZEICHNIS

1	ANALYTISCHE FUNKTIONEN	3
§ 1	Die komplexen Zahlen	3
§ 2	Die komplexe Ableitung	9
§ 3	Komplexe Stammfunktionen	23
§ 4	Cauchy-Formeln	33
§ 5	Identität, Offenheit, Gleichmässigkeit	44
2	MEROMORPHE FUNKTIONEN	49
§ 6	Einfacher Zusammenhang, Rektifizierbarkeit, Windungszahl	50
§ 7	Der Residuensatz	62
§ 8	Beispiele und Anwendungen	68
3	BIHOLOMORPHE ABBILDUNGEN	75
§ 9	Automorphismengruppen	75
§ 10	Der Riemannsche Abbildungssatz	85
§ 11	Ergänzungen und Beispiel	91
4	GANZE FUNKTIONEN	99
§ 12	Der Satz von Mittag-Leffler	99
§ 13	Die Gamma-Funktion	102

KAPITEL 1

ANALYTISCHE FUNKTIONEN

Die *Funktionentheorie*¹ beschäftigt sich mit den Eigenschaften *differenzierbarer* Funktionen *einer komplexen* Veränderlichen. Ihr Dreh- und Angelpunkt ist die Existenz eines Ableitungsbegriffs “auf halbem Weg” zwischen der bereits aus der Schule bekannten “Steigung der Tangenten” und dem in der Vektoranalysis eingeführten “totalen Differential”. Dieser *Holomorphiebegriff* wird durch die Körperstruktur auf den als reelle Paare identifizierten komplexen Zahlen ermöglicht. Der Wunsch nach der Umkehrung dieser Ableitung (d.h., nach der Existenz von holomorphen Stammfunktionen) zieht eine Reihe höchst überraschender Konsequenzen nach sich, die in jeder der beiden reellen Spezialisierungen verborgen geblieben wären. Unter anderem sind holomorphe Funktionen automatisch unendlich oft (komplex) differenzierbar, lassen sich stets lokal durch konvergente Potenzreihen darstellen, und parametrisieren Lösungen der zwei-dimensionalen Potentialgleichung. Diese Einsichten ermöglichen ausserdem Verbindungen zu einer ungeahnten Vielzahl weiterer mathematischer Teilgebiete und Anwendungen. Hierzu zählen insbesondere: Die Theorie der Riemannschen Flächen, und damit die Anfangsgründe der Differentialgeometrie, der algebraischen Topologie, und der algebraischen Geometrie; die analytische Zahlentheorie und die Theorie der Modulformen; die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Fragen der analytischen Fortsetzung und der asymptotischen Reihen; die harmonische Analysis und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen; die höher-dimensionale komplexe Analysis; u.v.a.m.

Diese Vorlesung ist eine klassische Einführung in die grundlegenden Tatsachen der Funktionentheorie mit einigen Verweisen auf ihre wichtigsten Anwendungen. Das Skript dient vor allem dem Dozenten zur Vorbereitung und wird den Auditores völlig ohne Gewähr und kostenfrei zur Verfügung gestellt. Für Kommentare, auch Fehlermeldungen, per MaMpf oder Email an walcher@uni-heidelberg.de, bin ich allerdings sehr dankbar.

- Homepage der Vorlesung im Sommersemester 2025:
web.mathi.uni-heidelberg.de/physmath/sose25/funktheo

§ 1 Die komplexen Zahlen

Wir erinnern zunächst an einige aus den Elementarvorlesungen bekannte Definitionen, Tatsachen, und Zusammenhänge.

¹Der im grösseren Kontext vielleicht etwas unglückliche Begriff ist historisch bedingt.

Definition 1.1. Unter den *komplexen Zahlen* versteht man die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der als $z = x + iy$ geschriebenen geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen, ausgerüstet mit (in offensichtlicher Quantifikation und Indizierung)

- (i) der *Addition* als Verknüpfung $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
- (ii) der *Multiplikation* als Verknüpfung $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1 \cdot z_2 := (x_1 y_1 - x_2 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$;
- (iii) der *komplexen Konjugation* als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z} := x - iy$
- (iv) dem *Absolutbetrag* als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto |z| := \sqrt{\bar{z}z}$
- (v) dem *Real-* und dem *Imaginärteil* als Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(z) := x$, $\operatorname{Im}(z) := y$

Die historische Begründung für die Einführung der reellen Zahlen liegt in der Lösung algebraischer Gleichungen, d.h. in der Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra.² Vom modernen Standpunkt aus ist hierfür das erfolgreiche Zusammenspiel zwischen den *algebraischen Strukturen* einerseits und den *geometrisch-topologischen* andererseits wesentlich.

Lemma 1.2. (i) Das Tripel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper, d.h. es gelten die vertrauten Rechenregeln mit $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$, und jede komplexe Zahl $z \neq 0_{\mathbb{C}}$ besitzt eine multiplikative Inverse z^{-1} mit $z \cdot z^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$.

(ii) Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto (x, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus.

(iii) Die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ist ein involutiver Körperautomorphismus mit $\mathbb{R}$ als invariantem Unterkörper.

Beweis. Etwas nicht-trivial (aber von zentraler Bedeutung) ist lediglich die Existenz des inversen Elements. Dieses lässt sich wegen $\bar{z}z = x^2 + y^2 > 0$ falls $z \neq 0$ auch “rein komplex” schreiben als

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (1.1)$$

□

Die Existenz assoziativer Verknüpfungen zwischen Vektorräumen, welche sich über der Addition verteilen, ist aus der Linearen Algebra wohl vertraut. Beispiel: $\cdot : \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $(A_1 + A_2)(v_1 + v_2) = A_1 v_1 + A_1 v_2 + A_2 v_1 + A_2 v_2$, allfällig mit Skalaren angereichert. Das besondere an der komplexen Multiplikation ist die Abgeschlossenheit, Kommutativität, und Invertierbarkeit.

Lemma 1.3. Es bezeichne $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ den Ring der 2×2 Matrizen mit reellen Einträgen, und $I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$. Dann ist der Zentralisator von I ,

$$C(I) := \{Z \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid ZI = IZ\} \quad (1.2)$$

²Dieser besagt bekanntlich, dass jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ (wo $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$) eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt, d.h. es existiert ein $z_* \in \mathbb{C}$ so dass $P(z_*) = 0$. (Im Anschluss daran folgt, dass P mit Multiplizität gezählt genau n Nullstellen besitzt.) Obwohl zentral für viele Anwendungen, benötigen wir diese Aussage zunächst nicht, und werden sie wie in der Funktionentheorie üblich erst als Korollar 4.14 des Satzes von Liouville, Theorem 4.13, beweisen.

§1. DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

ein Körper, und isomorph zu $\mathbb{C}$ via

$$\mathbb{C} \ni x + iy \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in C(I) \quad (1.3)$$

Mit anderen Worten: Die komplexen Zahlen sind genau die I -linearen Endomorphismen des 2-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Es gilt $\Phi(i) = I$, $I^2 = -\text{id}$. Komplexe Konjugation entspricht der Transposition, das Absolutquadrat der Determinante von Matrizen.

Check that notation for all matrices, variables and phases is consistent throughout, eliminate conflicts!

Beweis. Per Definition gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C(I)$ genau dann wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

mit anderen Worten $d = a$, $b = -c$. Die Abbildung (1.3) ist also wohldefiniert und surjektiv. Die Verträglichkeit mit Addition und Multiplikation, sowie alle übrigen Aussagen, überprüft man durch einfache Rechnungen. $\square$

Woher aber kommen die Verbindungen zur Geometrie und Topologie?

Lemma 1.4. Der Absolutbetrag entspricht unter der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ dem euklidischen Abstand vom Ursprung des Standardkoordinatensystems. Das euklidische innere Produkt ist $\langle z_1, z_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \text{Re}(\bar{z}_1 z_2)$. Komplexe Konjugation entspricht der Spiegelung an der reellen Achse. Es gelten die Beziehungen

$$\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.6)$$

die Abschätzungen

$$|\text{Re}(z)| \leq |z| \quad |\text{Im}(z)| \leq |z|, \quad (1.7)$$

die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle z_1, z_2 \rangle| \leq |z_1| \cdot |z_2| \quad (1.8)$$

sowie insbesondere die Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (1.9)$$

und ihre “Umkehrung”

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (1.10)$$

In Folge dessen ist $\mathbb{C}$ mit der Abstandsfunktion $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ ein vollständiger³ metrischer Raum, der als solcher die komplexe Ebene (manchmal auch: Gaussche Zahlenebene) genannt wird.

Setzen wir (an Stelle eines Beweises) für $z \neq 0$, $r := |z|$, schreiben

$$z = r \left(\underbrace{\frac{x}{r}}_{=:c} + i \underbrace{\frac{y}{r}}_{=:s} \right) \quad (1.11)$$

und entnehmen aus der reellen Analysis die Tatsache, dass für je zwei reelle Zahlen c und s mit $c^2 + s^2 = 1$ ein Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ existiert, und zwar genau einer im Intervall $(-\pi, \pi]$, mit $c = \cos \varphi$ und $s = \sin \varphi$, so erhalten wir daraus die Darstellung (Parametrisierung)

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.12)$$

komplexer Zahlen mittels *Polarkoordinaten*.

Definition 1.5. Die durch Gl. (1.12) für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}^\times (:= \mathbb{C} \setminus \{0\})$ bestimmte Klasse reeller Zahlen $[\varphi] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ heisst *Argument von z* , geschrieben $\arg(z)$. Die eindeutig bestimmte Zahl $\varphi \in (-\pi, \pi]$ heisst *Hauptwert des Arguments*, geschrieben $\text{Arg}(z)$.

Mit Hilfe der Additionstheoreme für $\sin$ und $\cos$ folgt dann leicht, dass Multiplikation mit z geometrisch interpretiert werden kann als Drehung um den Winkel φ , gefolgt von Streckung um den Faktor r : Ist $w = s(\cos \chi + i \sin \chi)$ so gilt

$$z \cdot w = r \cdot s (\cos(\varphi + \chi) + i \sin(\varphi + \chi)) \quad (1.13)$$

Achtung: Für diese Identifikation ist die Periodizität der trigonometrischen Funktionen von zentraler Bedeutung. Im Allgemeinen ist (falls definiert) $\text{Arg}(zw)$ *nicht gleich* $\text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$.

Nebenbei folgt aus Gl. (1.13) z.B. durch vollständige Induktion die *Formel von deMoivre*

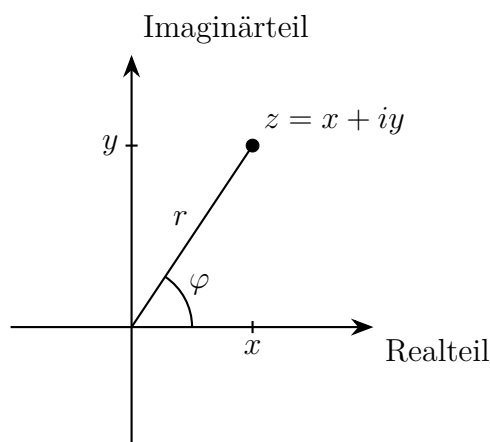
$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad (1.14)$$

und daraus ein Spezialfall des Fundamentalsatzes der Algebra: Für jede komplexe Zahl $a \neq 0$ und jede natürliche Zahl n existieren genau n verschiedene Lösungen der Gleichung $z^n = a$. (Übungsaufgabe)

Die “Drehstreckung” bietet eine (fast) äquivalente Charakterisierung der komplexen Multiplikation.

³(Cauchy-)Vollständigkeit bedeutet bekanntlich, dass für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ komplexer Zahlen die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Es existiert ein $z \in \mathbb{C}$ so, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein N_ϵ existiert so, dass $|z - z_n| < \epsilon$ für alle $n \geq N_\epsilon$. ((z_n) konvergiert mit Grenzwert z , geschrieben $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.)
2. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein N_ϵ so, dass $|z_n - z_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N_\epsilon$. ((z_n) ist eine Cauchy-Folge.)



§1. DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

Proposition 1.6. Eine durch eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ dargestellte $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist genau dann konform (d.h. hier, winkeltreu) wenn $A \neq 0$ und entweder $d = a$ und $b = -c$ oder $d = -a$ und $b = c$. Im ersten Fall entspricht A der Multiplikation mit der komplexen Zahl $a + ic \neq 0$, im zweiten Fall mit vorgeschalteter komplexen Konjugation.

Beweis. Der Winkel zwischen zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist gegeben durch

$$\cos(\angle(v, w)) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \quad (1.15)$$

wo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Hieraus folgt: Die lineare Abbildung A ist genau dann winkeltreu, wenn eine Zahl $\lambda > 0$ existiert so dass

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda^2 \mathbb{1}_2 \quad (1.16)$$

a und c können also nicht beide gleich Null sein. Ist $a \neq 0$, so gilt $b = -\frac{cd}{a}$. Dann impliziert $b^2 + d^2 = \frac{d^2}{a^2}(a^2 + c^2) \stackrel{!}{=} a^2 + c^2$, dass entweder $d = a$ oder $d = -a$. Im ersten Fall ist

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

im zweiten

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Die Aussage folgt dann aus dem Vergleich mit Gl. (1.3) und der Identifikation des zweiten Faktors mit der komplexen Konjugation. (Der Fall $c \neq 0$ führt auf den gleichen Schluss.) $\square$

Während also die algebraischen und geometrischen Partikularitäten der komplexen Zahlen (und insbesondere die Konkordanz von Lemma 1.3 und Proposition 1.6) offensichtlich streng von der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als zwei-dimensionalem reellen Vektorraum abhängen, scheinen die topologischen Grundbegriffen zunächst nur eine Spezialisierung der allgemeinen Theorie.

Definition 1.7. Für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne

$$B_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\} \quad (1.19)$$

die *offene Kreisscheibe vom Radius r um z* , und

$$\overline{B}_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| \leq r\} \quad (1.20)$$

die *abgeschlossene*. Dann heisst eine beliebige Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$

(i) *offen*, falls für alle $z \in A$ ein $r > 0$ existiert so dass $B_r(z) \subset A$. Übliches Symbol für offene Mengen: U .

(ii) *abgeschlossen*, falls für alle $z \notin A$ ein $r > 0$ existiert so dass $B_r(z) \cap A = \emptyset$;

- (iii) *beschränkt*, falls ein $R > 0$ existiert so dass $A \subset B_R(0)$
- (iv) *zusammenhängend*, falls für jede Überdeckung $A \subset U_1 \cup U_2$ von A durch zwei disjunkte offene Mengen bereits entweder $U_1 \cap A = \emptyset$ oder $U_2 \cap A = \emptyset$ gilt.⁴
- (v) *kompakt*, falls für jede Überdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ von A durch eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Mengen eine durch eine *endliche* Menge $J \subset I$ (d.h. $\#J < \infty$) indizierte *endliche Teilüberdeckung* $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ existiert.⁵ Übliches Symbol für kompakte Mengen: K .

Diese Begriffe erfüllen die vertrauten Eigenschaften und Beziehungen, die wir uns, ebenso wie die daraus abgeleiteten Konzepte, erst bei Bedarf ins Gedächtnis rufen wollen. Relevant wird im Zusammenhang mit der komplexen Analysis die Tatsache, dass die komplexen Zahlen (als topologischer Raum) eine sehr viel grössere Diversität an Teilmengen besitzen, als die reellen, und in die die Untersuchung holomorpher Funktionen eine erstaunliche Harmonie hineinbringt.

Mind map: In der reellen Analysis sind die offenen Teilmengen die natürlichen Definitionsbereiche von Funktionen, die wir auf Differenzierbarkeit untersuchen wollen. Abgeschlossene (und beschränkte) Teilmengen sind diejenigen, über die wir (z.B. im Sinne der Masstheorie) eigentlich sinnvoll integrieren können. Jede offene Menge zerfällt in abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Im ein-dimensionalen Fall gilt mehr: Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die (nicht-leeren) Intervalle. Wir können auf (halb-)abgeschlossenen Intervallen auch links- und rechtsseitige Ableitungen betrachten, sowie umgekehrt in einer eindeutigen Weise Funktionen auf (halb-)offenen Intervallen “uneigentlich integrieren”. (Zumindest) jede stetige Funktion besitzt auf einem Intervall eine bis auf eine additive Konstante eindeutige Stammfunktion. In der komplexen Ebene machen alle diejenigen Aussagen, die von der Anordnung der reellen Zahlen abhängen, keinen Sinn mehr. Von zentraler Bedeutung scheint dabei die Frage nach dem komplexen Analogon von Intervallen.

Lemma 1.8. *Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.*

- (i) I ist anordnungsconvex, d.h. $\forall a, b \in I, c \in \mathbb{R}$ gilt $a < c < b \Rightarrow c \in I$.
- (ii) I ist linear konvex, d.h. $\forall a, b \in I, \forall t \in [0, 1]$ gilt $(1 - t)a + tb \in I$.
- (iii) I ist (entweder leer oder) (topologisch) zusammenhängend.
- (iv) I ist wegzusammenhängend, d.h. für alle $a, b \in I$ existiert eine stetige⁶ Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow I$ mit $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$.
- (v) I ist die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}_{r_i}(a_i)$ einer aufsteigenden Folge $\overline{B}_{r_i}(a_i) \subset \overline{B}_{r_{i+1}}(a_{i+1})$ abgeschlossener “metrischer Kugeln” $\overline{B}_r(a) := \{b \in \mathbb{R} \mid |b - a| \leq r\}$ (oder der Schnitt einer absteigenden Folge offener Kugeln).

⁴ Wegen der ausschliessenden Disjunktion können $U_1 \cap A$ und $U_2 \cap A$ nicht beide leer sein. Die leere Menge ist also nicht zusammenhängend.

⁵Nach dem Satz von Heine-Borel ist A genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist. Ebenfalls äquivalent dazu ist die Aussage, dass jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge (d.h., einen Häufungswert in A) besitzt (Folgenkompaktheit, Satz von Bolzano-Weierstrass).

⁶d.h., für alle $t_0 \in [0, 1]$ und für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \epsilon$ für alle $t \in [0, 1]$ mit $|t - t_0| < \delta$.

§ 2. DIE KOMPLEXE ABLEITUNG

Beweis. Übungsaufgabe □

Für Teilmengen $D \subset \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sind die obigen Aussagen, mit Ausnahme von (i), zwar prinzipiell sinnvoll, aber *nicht mehr äquivalent* zueinander. Vom Standpunkt der zwei-dimensionalen euklidischen Geometrie ist dies nicht weiter überraschend (oder doch?), für die ein-dimensionale Differential- und Integralrechnung jedoch von fundamentaler Bedeutung.

§ 2 Die komplexe Ableitung

Die komplexe Differenzierbarkeit basiert wie ihr reelles Pendant auf der Stetigkeit und der Grenzwertbildung von Folgen und Abbildungen. Wir beleuchten diese Begriffe hier noch einmal kurz, setzen Beispiele, Rechenregeln, etc. aber im Wesentlichen als bekannt voraus. Als Definitionsbereiche lassen wir dabei zunächst beliebige Teilmengen von $\mathbb{C}$ zu, als Wertebereich nur den ein-dimensionalen komplexen Vektorraum $\mathbb{C}$ selber.

Definition 2.1. Sei $A \subset \mathbb{C}$.

- (i) Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heisst *Häufungspunkt* von A , falls eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen existiert, welche in $A \setminus \{z_0\}$ verläuft und gegen z_0 konvergiert.⁷
- (ii) Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von A , so sagt man, eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ habe in z_0 den Grenzwert w_0 , falls für jede Folge $(z_n) \subset A \setminus \{z_0\}$, welche gegen z_0 konvergiert, die Bildfolge $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen w_0 konvergiert. Schreibweise:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad (2.1)$$

Notation. Für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne

$$\dot{B}_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - w| < r\} = B_r(z) \setminus \{z\} \quad (2.2)$$

die (*offene*) *punktierte Kreisscheibe* vom Radius r um z .

Lemma 2.2. (i) $z_0 \in \mathbb{C}$ ist genau dann Häufungspunkt von $A \subset \mathbb{C}$, falls für jedes $r > 0$ $\dot{B}_r(z_0) \cap A \neq \emptyset$.

(ii) $z_0 \in \mathbb{C}$ ist genau dann Häufungspunkt von $A \subset \mathbb{C}$, falls für jedes $r > 0$ $B_r(z_0) \cap A$ unendlich viele Punkte enthält.

(iii) Ist $z_0 \in A$ ein Häufungspunkt von A , so ist $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann stetig in z_0 , wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Beweis. $\Leftarrow_{(i)}, \Leftarrow_{(ii)}$: Ist $(z_n) \subset A \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, und für beliebiges $r > 0$ N_r so dass $|z_n - z_0| < r$ falls $n \geq N_r$, so ist die Menge $\dot{B}_r(z_0) \cap A$ jedenfalls nicht leer. Wäre sie endlich, so könnte (z_n) nur endliche viele Werte annehmen und somit nicht gegen z_0 konvergieren.

⁷Achtung: Davon sorgfältig zu unterscheiden ist der Begriff des Häufungswerts einer Folge, wie er etwa in Fussnote 5 vorkommt. Ist z.B. $A = \{z_0\}$ eine einpunktige Menge, so hat jede Folge in A z_0 als Häufungswert, z_0 ist aber nicht Häufungspunkt der Menge.

$\Rightarrow_{(i)}, \Rightarrow_{(ii)}$: Unter jeder der beiden Voraussetzungen enthält für jedes $r = \frac{1}{n} > 0$ $B_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap A$ einen von z_0 verschiedenen Punkt z_n . Die daraus gebildete Folge (z_n) verläuft in $A \setminus \{z_0\}$ und konvergiert gegen z_0 .

$\Leftarrow_{(iii)}$: Ist f stetig in z_0 und $(z_n) \subset A \setminus \{z_0\}$ mit $\lim z_n = z_0$, so sei, für beliebiges $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ so, dass $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ für alle $z \in A$ mit $|z - z_0| < \delta$. Sodann sei N_δ so, dass $|z_n - z_0| < \delta$ falls $n \geq N_\delta$. Dann ist für alle $n \geq N_\delta$ auch $|f(z_n) - f(z_0)| < \epsilon$, d.h. $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

$\Rightarrow_{(iii)}$: Ist $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ und f nicht stetig in z_0 , so existiert ein $\epsilon_* > 0$ so, dass für jedes $\delta = \frac{1}{n}$ ein $z_n \in B_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap A$ existiert so, dass $|f(z_n) - f(z_0)| \geq \epsilon_*$. Dann aber konvergiert $(z_n) \subset A \setminus \{z_0\}$ gegen z_0 , $(f(z_n))$ jedoch nicht gegen $f(z_0)$. $\nexists \quad \square$

Bemerkungen. · Der Begriff des Häufungspunktes ist interessant unabhängig davon, ob z_0 selbst in A liegt oder nicht. Ein Punkt $z_0 \in A$, welcher kein Häufungspunkt von A ist, heisst auch *isolierter Punkt von A*. Dies ist äquivalent dazu, dass ein $r > 0$ existiert so, dass $B_r(z_0) \cap A = \{z_0\}$.

· Lemma 2.2 (iii) lässt sich dann wie folgt verschärfen: Ist z_0 Häufungspunkt von A , und $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, so ist die Funktion

$$\tilde{f} : A \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in A \setminus \{z_0\} \\ w_0 & \text{falls } z = z_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

genau dann stetig in z_0 , wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$. Ist in diesem Fall $z_0 \in A$, so ist f genau dann stetig in z_0 wenn $f(z_0) = \tilde{f}(z_0)$. Ist ursprünglich $z_0 \notin A$, so nennt man $\tilde{f}$ die *stetige Fortsetzung von f nach z_0* .

· Einseitige Grenzwerte machen, wie schon auf S. 8 bemerkt, im Komplexen keinen Sinn. Daher beschränken wir uns für die Differenzierbarkeit jedenfalls auf offene Definitionsbereiche, deren jeder Punkt ein Häufungspunkt ist.

Definition 2.3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heisst *komplex differenzierbar* in $z_0 \in U$, falls der Differenzenquotient

$$U \setminus \{z_0\} \ni \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.4)$$

sich stetig nach z_0 fortsetzen lässt. In diesem Fall heisst der Wert der Fortsetzung in z_0 die *(komplexe) Ableitung von f in z_0* . Schreibweise und äquivalent dazu:

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz}$$

$$(ii) \forall (z_n) \subset U \setminus \{z_0\} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = f'(z_0)$$

$$(iii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{h} = 0$$

(iv) Es existiert eine in z_0 stetige Funktion $R : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = f'(z_0)$ und $f(z) = f(z_0) + R(z)(z - z_0)$ für alle $z \in U$.

(v) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ so, dass $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon|z - z_0|$ für alle $z \in U$ mit $|z - z_0| < \delta$.

§ 2. DIE KOMPLEXE ABLEITUNG

Die Funktion heisst *holomorph in* $z_0 \in U$, wenn sie in jedem Punkt einer offenen Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist, und *holomorph auf* U , wenn sie dort überall komplex differenzierbar ist.

Bemerkungen. · Die Definition 2.3 ist formal identisch zum Ableitungsbegriff aus der ein-dimensionalen Differentialrechnung (Analysis 1).⁸ Die Körperstruktur von $\mathbb{C}$ geht in die Differenzenquotienten ein durch die Invertierbarkeit jeder von 0 verschiedenen komplexen Zahl. In den Formulierungen mittels “linearer Approximation” wie (iii), (iv) oder (v) ist sie in der (kommutativen!) Multiplikation mit der komplexen Ableitung als lineare Transformation des Inkrements versteckt (hierzu gleich mehr).

· Die Definition erlaubt eine offensichtliche Verallgemeinerung zu normierten *komplexen* Vektorräumen als Wertebereich (so dass man nämlich $f(z) - f(z_0)$ mit $(z - z_0)^{-1}$ multiplizieren kann). Insbesondere für endlich-dimensionale $\mathbb{C}$ -Vektorräume gelten viele der folgenden Aussagen sinngemäss weiter.

· Eine komplex differenzierbare Funktion ist automatisch stetig.⁹ Es stellt sich heraus (und dies ist eine der wichtigsten Erkenntnisse), dass die Ableitung(sfunktion) einer holomorphen Funktion ebenfalls automatisch stetig (und sogar komplex differenzierbar) ist, weshalb der Begriff der “stetigen komplexen Differenzierbarkeit” nicht separat eingeführt wird.

Lemma 2.4. *Es gelten die aus der ein-dimensionalen Differentialrechnung bekannten Rechenregeln: Sind $f_1 : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, und $\lambda \in \mathbb{C}$, so auch die punktweise definierten $f_1 + \lambda f_2$, $f_1 \cdot f_2$ sowie (falls $f_1(z_0) \neq 0$) $f_1^{-1} = 1/f_1$ mit den Ableitungen*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dz} \right|_{z=z_0} (f_1 + \lambda f_2) &= f_1'(z_0) + \lambda f_2'(z_0) \\ \left. \frac{d}{dz} \right|_{z=z_0} (f_1 \cdot f_2) &= f_1'(z_0) f_2(z_0) + f_1(z_0) f_2'(z_0) \\ \left. \frac{d}{dz} \right|_{z=z_0} \frac{1}{f_1} &= -\frac{f_1'(z_0)}{f_1(z_0)^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Beweis. Die Linearität ist offensichtlich. Die Produktregel folgt aus $(f_1 \cdot f_2)(z) - (f_1 \cdot f_2)(z_0) = (f_1(z) - f_1(z_0))f_2(z) + f_1(z_0)(f_2(z) - f_2(z_0))$ und den Rechenregeln für Grenzwerte, d.h., der Stetigkeit der Multiplikation. Zur Aussage über f_1^{-1} ist zu bemerken: Wegen der Stetigkeit von f_1 in z_0 folgt aus $f_1(z_0) \neq 0$, dass $f_1(z) \neq 0$ für alle z in einer (geeignet kleinen) Umgebung von z_0 . Dort ist

$$\left(\frac{1}{f_1(z)} - \frac{1}{f_1(z_0)} \right) \frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{f_1(z)f_1(z_0)} \frac{f_1(z_0) - f_1(z)}{z - z_0} \quad (2.6)$$

so dass die Aussage wieder aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt. $\square$

⁸ Ist insbesondere $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung einer (relativ) offenen Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ die Fortsetzung einer reellen Funktion $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h. einfach nur, dass $f|_I = \tilde{f}$), so gilt: Ist f in $z_0 = x_0 \in I \subset U$ komplex differenzierbar, so ist $\tilde{f}$ in x_0 reell differenzierbar und es gilt $\frac{d\tilde{f}}{dx}(x_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$.

⁹ Dies ist offensichtlich in der Formulierung (iv). Direkter folgt aus (i), dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$ falls $z \in U$ und $0 < |z - z_0| < \delta$. Dann ist $|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| + |(z - z_0)f'(z_0)| \leq |z - z_0|(\epsilon + |f'(z_0)|) < \epsilon$ falls nur $|z - z_0| < \min\{\delta, \frac{\epsilon}{\epsilon + |f'(z_0)|}\}$. Das heisst, f ist stetig in z_0 .

Korollar 2.5. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann bildet die Menge der auf U holomorphen Funktionen mit den obigen Verknüpfungen eine kommutative $\mathbb{C}$ -Algebra (ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit einer assoziativen und kommutativen Multiplikation, welche über der Vektorraum-Addition distributiv ist). Notation: $\mathcal{O}(U)$ bzw. $\mathcal{O}_U$.¹⁰

Beispiele 2.6. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Potenzfunktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^n$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph mit Ableitung

$$\frac{d}{dz} \Big|_{z=z_0} z^n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = \dots = n z_0^{n-1} \quad (2.7)$$

• Für jedes Polynom $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ ist die Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto P(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph mit $P'(z) = n a_n z^{n-1} + \dots + 2 a_2 z + a_1$.

• Die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist nirgends komplex differenzierbar.

Bew.: Für festes $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt mit $z_n = z_0 + \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}_n - \bar{z}_0}{z_n - z_0} = 1$, für $\tilde{z}_n = z_0 + \frac{i}{n}$ aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\tilde{z}}_n - \bar{z}_0}{\tilde{z}_n - z_0} = -1$. Der Differenzenquotient hat also keinen “von der betrachteten Folge unabhängigen (und damit überhaupt keinen) Grenzwert”. (Vgl. Def. 2.1 und Def. 2.3 (iii).)

• Die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z} z^2$ ist in $z_0 = 0$ komplex differenzierbar, aber in keiner (nicht-leeren) offenen Menge holomorph. (Übung)

Proposition 2.7 (Kettenregel). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, $V \subset \mathbb{C}$ offen mit $f(U) \subset V$, und $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ in $w_0 := f(z_0) \in V$ komplex differenzierbar. Dann ist die Komposition $g \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar mit $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) f'(z_0)$.

Beweis. Aus der Diff'barkeit von g in w_0 in der Formulierung (iv) von Def. 2.3 folgt die Existenz einer in w_0 stetigen Funktion $S : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{w \rightarrow w_0} S(w) = g'(w_0)$ und $g(w) = g(w_0) + S(w)(w - w_0)$. Daraus folgt mit $w = f(z)$ für alle $z \in U$:

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = S(f(z)) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} g'(w_0) f'(z_0) \quad (2.8)$$

wegen der Stetigkeit von f in z_0 , der Stetigkeit von S in w_0 , und der Differenzierbarkeit von f in z_0 .

Ausführlicher mit Def. 2.3 (v): Sei für gegebenes $\zeta > 0$ $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(w_0) \subset V$ sowie

$$|g(w) - g(w_0) - g'(w_0)(w - w_0)| \leq \zeta |w - w_0| \quad \text{falls } |w - w_0| < \epsilon \quad (2.9)$$

Weiters sei $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(z_0) \subset U$ sowie gleichzeitig $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ und

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \zeta |z - z_0| \quad \text{falls } |z - z_0| < \delta \quad (2.10)$$

Gl. (2.10) und Dreiecks-Ugl.

Dann folgt für $|z - z_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |g(f(z)) - g(f(z_0)) - g'(w_0) f'(z_0)(z - z_0)| &\leq \\ |g(f(z)) - g(f(z_0)) - g'(w_0)(f(z) - f(z_0))| &+ |g'(w_0)| \cdot \zeta |z - z_0| \\ &\leq \zeta |f(z) - f(z_0)| + \zeta |g'(w_0)| \cdot |z - z_0| \leq \zeta (|f'(z_0)| + \zeta + |g'(w_0)|) |z - z_0| \end{aligned} \quad (2.11)$$

^{Gl. (2.9)}
Daraus folgt die Behauptung. □

^{Gl. (2.10)}

¹⁰Das Symbol $\mathcal{O}$ steht hier natürlich für den ersten Buchstaben des Worts “Ordnung”.

§ 2. DIE KOMPLEXE ABLEITUNG

Trotz der fortgesetzten Gültigkeit all dieser Rechenregeln scheint die anschauliche Interpretation der Ableitung als “Steigung der Tangente” bei der komplexen Verallgemeinerung verloren gegangen zu sein. Abhilfe verschafft uns hier, wie bereits angedeutet, der Vergleich der Definition 2.3 mit dem Begriff der totalen Ableitung aus der zwei-dimensionalen Vektoranalysis.

Theorem 2.8. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, mittels linearer Koordinaten $z = x + iy \mapsto (x, y)$ im Definitionsbereich und $w = u + iv \mapsto (u, v)$ im Wertebereich tautologisch aufgefasst als vektorwertige Funktion zweier reeller Veränderlicher, d.h., $u(x, y) := \operatorname{Re}(f(x + iy))$, $v(x, y) := \operatorname{Im}(f(x + iy))$ bzw. $f(z) = u(\operatorname{Re}(z)) + iv(\operatorname{Im}(z))$. Dann sind äquivalent:*

(i) $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist in $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ im Sinne von Def. 2.3 komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0) = a + ib \in \mathbb{C}$.

(ii) $(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist in $(x_0, y_0) = (\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)$ im Sinne der reellen Analysis total differenzierbar, und die partiellen Ableitungen erfüllen die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (2.12)$$

Dabei entspricht die reelle Ableitung (das totale Differential) der Multiplikation mit $f'(z_0)$ als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, bezüglich den Standard-Koordinaten dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \quad (2.13)$$

Beweis im Übermass. Per Definition ist (u, v) genau dann in (x_0, y_0) total differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $D(u, v)(x_0, y_0)$ existiert so dass (in üblicher Notation)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\|(u, v)(x, y) - (u, v)(x_0, y_0) - D(u, v)(x_0, y_0)((x, y) - (x_0, y_0))\|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0 \quad (2.14)$$

Gemäss Lemma 1.3 ist die Darstellung von $D(u, v)(x_0, y_0)$ bezüglich der gegebenen Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ als Jacobi-Matrix von partiellen Ableitungen, $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$, genau dann von der Gestalt (2.13), wenn sie der Multiplikation mit der komplexen Zahl $a + ib$ entspricht. Wegen der Äquivalenz des Grenzwerts $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ in $\mathbb{R}^2$ mit dem Grenzwert $z \rightarrow z_0$ in $\mathbb{C}$ gilt also (ii) genau dann, wenn eine komplexe Zahl $a + ib = f'(z_0)$ existiert so, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0 \quad (2.15)$$

d.h., wenn f in z_0 komplex differenzierbar ist. In diesem Fall lässt sich die Ableitung auch als Grenzwert des Differenzenquotienten in “beliebiger Richtung” berechnen. Entlang der reellen Achse, d.h. für $z = z_0 + t$ mit $t \in \mathbb{R}$ findet man

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (2.16)$$

Entlang der imaginären Achse ist $z = z_0 + it$ mit $t \in \mathbb{R}$ und

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{it} = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (2.17)$$

Koeffizientenvergleich ergibt unmittelbar die Cauchy-Riemann-Gleichungen (2.12). $\square$

Anschaulich:

Korollar 2.9. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. In jedem Punkt $z_0 \in U$, in dem die Ableitung $f'(z_0) \neq 0$, ist diese eine orientierungstreue konforme Abbildung der zugrundeliegenden euklidischen Ebenen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Man nennt f daher selbst ebenfalls konform.

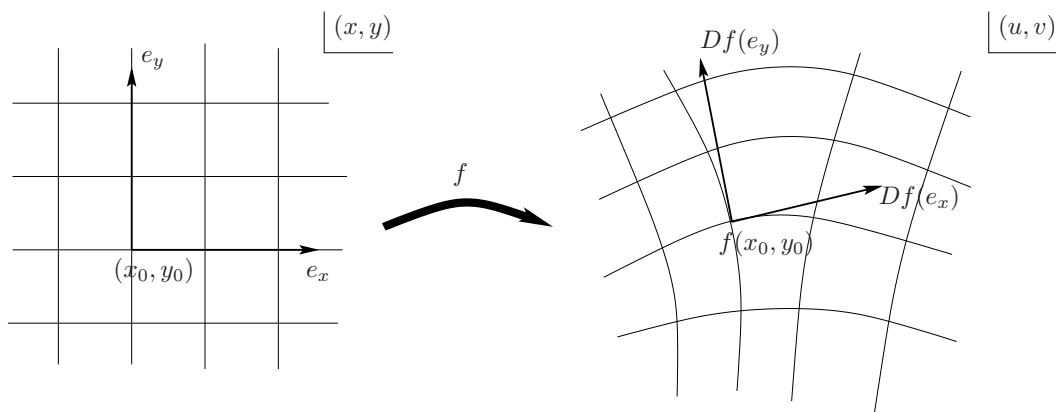
Beweis. Dies folgt sofort aus der Charakterisierung komplex-linearer Abbildungen aus Lemma 1.3 als orientierungstreue lineare konforme Abbildungen in Proposition 1.6. Vektoranalytisch sind die Bilder der x - und y -Koordinatenrichtungen, $e_x = (1, 0)$ und $e_y = (0, 1)$ unter der Ableitung $Df : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in der (u, v) -Ebene gegeben durch (mit unterdrücktem Argument)

$$Df(e_x) = (\partial_x u, \partial_x v), \quad Df(e_y) = (\partial_y u, \partial_y v) \quad (2.18)$$

Als Konsequenz der Cauchy-Riemann-Gleichungen gilt bezüglich dem euklidischen inneren Produkt in Definitions- und Wertebereich

$$\langle Df(e_x), Df(e_y) \rangle = \langle e_x, e_y \rangle = 0, \quad \|Df(e_x)\| = \|Df(e_y)\| \quad (2.19)$$

und daraus folgt (im Fall $f'(z_0) \neq 0$), dass das totale Differential den Winkel zwischen je zwei beliebigen Richtungen im Tangentialraum $T_{(x_0, y_0)} U \cong \mathbb{R}^2$ erhält, Längen aber um einen gemeinsamen Faktor vergrößert oder verkleinert (“Drehstreckung”). $\square$



Bemerkung. Bekanntlich ist die Existenz partieller Ableitungen nicht hinreichend für die totale Differenzierbarkeit, und daher die Gültigkeit der Cauchy-Riemann-Gleichungen in einem Punkt auch nicht für die komplexe. (Beispiel: $f(x, y) := \sqrt{|x| \cdot |y|}$ mit $\partial_x f(x, 0) \equiv 0$ und $\partial_y f(0, y) \equiv 0$.) Nehmen wir andererseits vorweg,

§ 2. DIE KOMPLEXE ABLEITUNG

dass die komplexe Differenzierbarkeit in einer offenen Menge die Existenz und Stetigkeit aller höheren Ableitungen impliziert, so folgt durch Einsetzen,

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u &\stackrel{(2.12)}{=} \partial_x \partial_y v \stackrel{\text{Satz von Schwarz}}{=} \partial_y \partial_x v \stackrel{(2.12)}{=} -\partial_y^2 u \\ &\Rightarrow \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Das heisst also, dass der Real- (und auch Imaginär-)Teil einer holomorphen Funktion die zwei-dimensionale Laplace-Gleichung löst. Derartige Funktionen heissen auch *harmonisch*.

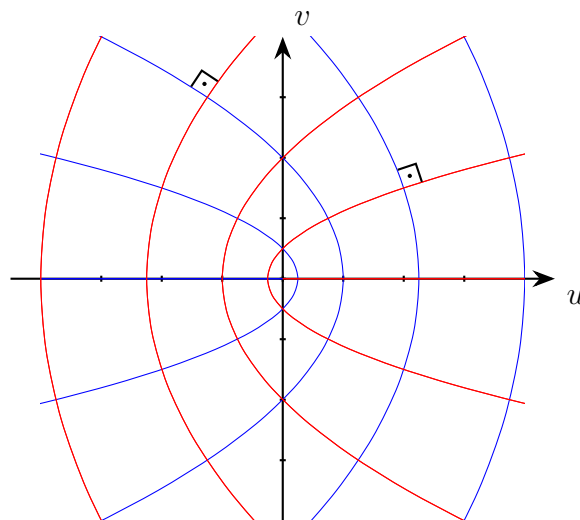
Beispiel 2.10. Real- und Imaginärteil der Abbildung $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto Q(z) = z^2$ sind

$$u(x, y) = \operatorname{Re}((x + iy)^2) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = \operatorname{Im}((x + iy)^2) = 2xy \quad (2.21)$$

Es gilt offenbar

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.22)$$

Die Kurven mit konstantem $x \neq 0$ sind nach links offene (blaue) Parabeln $u = x^2 - v^2/(4x^2)$, die mit konstantem $y \neq 0$ nach rechts offene (rote) Parabeln $u = v^2/(4y^2) - y^2$. Sie entarten für $x = 0$ bzw. $y = 0$ zur negativen bzw. positiven reellen Achse. Die Parabeln schneiden sich gegenseitig orthogonal in je zwei Punkten (entsprechend einem relativen Vorzeichenwechsel von x und y), die Halbgeraden in einem. Nur im Ursprung ist $Q' = 0$.



Potenzreihen...

...sind nach Polynomen und rationalen Funktionen die wichtigste elementare Quelle holomorpher Funktionen.

Proposition 2.11. Sei $(a_n)_{n=0,1,\dots} \subset \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen,

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (2.23)$$

die aus (a_n) gebildete Potenzreihe, und

$$R := \sup\{r \in \mathbb{R} \mid P(r) \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty] = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \quad (2.24)$$

ihr Konvergenzradius. Dann gilt

- (i) Für alle $r < R$ konvergiert $P(z)$ absolut und gleichmässig für alle $z \in \overline{B}_r(0)$.
 (ii)

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} & (\text{Cauchy-Hadamard, gilt immer}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} & (\text{falls der Limes existiert}) \end{cases} \quad (2.25)$$

- (iii) Die Funktion $z \mapsto P(z)$ ist an jeder Stelle $z_0 \in B_R(0)$ innerhalb ihrer Konvergenzscheibe (stetig und) komplex differenzierbar mit der gliedweise gebildeten Ableitung

$$P'(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z_0^{n-1} \quad (2.26)$$

Beweis. Die Aussagen zur Konvergenz und die Formeln für R folgen bekanntlich durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. Ist etwa $r < R$, und ρ so, dass $r < \rho < R$, so konvergiert $P(\rho)$, die Folge $a_n \rho^n$ ist also auf jeden Fall beschränkt, d.h. es existiert ein $M \in \mathbb{R}$ so dass $|a_n \rho^n| \leq M$ für alle n . Dann gilt für jedes $z \in \overline{B}_r(0)$, dass $|a_n z^n| \leq M(|z|/\rho)^n \leq M(r/\rho)^n$, wegen $r/\rho < 1$ liegt also eine (von z unabhängige!) konvergente Majorante vor. Dies zeigt die absolute und gleichmässige Konvergenz.

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit (die die Stetigkeit impliziert) halten wir fest, dass die Reihe der gliedweisen Ableitungen $\sum a_n n z^{n-1}$ wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ den gleichen Konvergenzradius hat wie P und daher ebenso wie P für jedes $|z| < R$ absolut konvergiert. Insbesondere können wir die Reihen beliebig umordnen und umgruppieren. Ist dann $z_0 \in B_R(0)$ gegeben und r so, dass $z_0 < r < R$, so existiert für gegebenes $\epsilon > 0$ ein N so gross, dass

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} < \frac{\epsilon}{3} \quad (2.27)$$

Dann ist für alle $|z| < r$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z_0^{n-1} (z - z_0) \right| \\ & \leq \left| \sum_{n=0}^N (a_n z^n - a_n z_0^n - a_n n z_0^{n-1} (z - z_0)) \right| \\ & \quad + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot \underbrace{|z^n - z_0^n|}_{\leq n r^{n-1} |z - z_0|} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} |z - z_0|}_{< \frac{2}{3} \epsilon \cdot |z - z_0|} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Da Polynome komplex differenzierbar sind, existiert ein $\delta > 0$ so, dass die endliche Summe für $|z - z_0| < \delta$ kleiner als $\frac{\epsilon}{3} \cdot |z - z_0|$ ist. Zusammen ist alles kleiner als $\epsilon \cdot |z - z_0|$, falls $z \in B_\delta(z_0) \cap B_r(0)$. Gemäss Definition 2.3 (v) folgt daraus die Behauptung. $\square$

§ 2. DIE KOMPLEXE ABLEITUNG

Beispiele 2.12. Geometrische (oder Neumann-)Reihe

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad R = 1 \quad (2.29)$$

Logarithmus-(oder Mercator-)Reihe

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad R = 1 \quad (2.30)$$

Exponentialreihe

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = \infty \quad (2.31)$$

Sinus-Reihe

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = \infty \quad (2.32)$$

Cosinus-Reihe

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad R = \infty \quad (2.33)$$

Proposition 2.13. (i) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad (2.34)$$

Insbesondere ist

$$\exp(z) \exp(-z) = \exp(0) = 1 \text{ und daher } \exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2.35)$$

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z) \quad (2.36)$$

Daraus folgen (unter anderem)

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \\ \cos(z)^2 + \sin(z)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\exp(z) = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}, \text{ etc.}$$

wo π wie in der reellen Analysis z.B. als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle des Kosinus definiert wird.

In den folgenden §§ werden wir mit Hilfe der komplexen Integrationstheorie(!) zeigen, dass die Darstellbarkeit einer Funktion durch Potenzreihen in “lokalen Kreisscheiben” nicht nur hinreichend, sondern sogar *notwendig* ist für die komplexe Differenzierbarkeit in einer offenen Menge.¹¹ Siehe insbesondere Theorem 4.7. Wir wollen hier vorweg einige Aussagen beleuchten, die dann rein aus dieser grundlegenden *Analytizität holomorpher Funktionen* folgen. Zunächst die Definition.

¹¹Damit wird wohlgemerkt nicht gesagt, dass Potenzreihen im Allgemeinen die einzige oder “beste” Definition einer holomorphen Funktion sind.

Definition 2.14. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ heisst (komplex) *analytisch*, falls es für jeden Punkt $z_0 \in U$ eine Folge $(a_k^{(z_0)})$ komplexer Zahlen und ein $\delta > 0$ gibt so, dass $B_\delta(z_0) \subset U$ und für alle $z \in B_\delta(z_0)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(z_0)} (z - z_0)^k \quad (2.38)$$

Durch wiederholte Anwendung von Proposition 2.11 (iii) folgt sofort:

Korollar 2.15. Eine analytische Funktion ist in ihrem Definitionsbereich unendlich oft komplex differenzierbar, und für jede Entwicklung der Form (2.38) gilt für alle n die “Taylor-Formel”

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^n \Big|_{z=z_0} f = f^{(n)}(z_0) = n! a_n^{(z_0)} \quad (2.39)$$

Insbesondere sind die Koeffizienten der *Potenzreihenentwicklung* um z_0 in Gl. (2.38) eindeutig durch f bestimmt, und die Potenzreihe auf der rechten Seite hat einen positiven Konvergenzradius $R^{(z_0)}$. Dies bedeutet wohlgermerkt noch nicht, dass die Eigenschaften von f eindeutig durch die Angabe ihrer Potenzreihe um z_0 bestimmt sind.¹² Wir haben weder gezeigt, dass eine durch eine (einzige) Potenzreihe definierte Funktion (sagen wir auf ihrer Konvergenzscheibe) selbst bereits analytisch ist, noch ist es im Allgemeinen richtig, dass (in der Situation (2.38)) $B_{R^{(z_0)}}(z_0) \subset U$. Zur Illustration dieser beiden Punkte betrachten wir als (noch nicht ganz aussagekräftiges) Beispiel die “Umentwicklung” der geometrischen Reihe (2.29)

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1 \quad (2.40)$$

um den Punkt $z_0 \in B_1(0)$, m.a.W. die Taylor-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z_0^n (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k \quad (2.41)$$

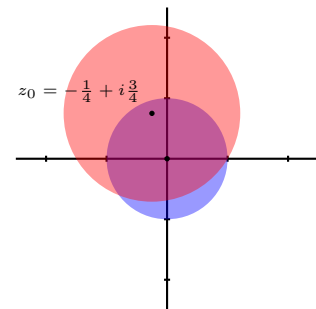
Diese konvergiert offensichtlich mit $R^{(z_0)} = |1 - z_0|$, d.h. solange z nicht weiter von z_0 entfernt ist als die 1, und zwar dort wieder gegen

$$\frac{1}{1 - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{1 - z_0}} = \frac{1}{1 - z} \quad (2.42)$$

Wir können also durch geeignete “Potenzreihenmanöver” den Definitionsbereich einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion quasi magisch von selbst vergrössern.

Per Definition sind Potenzreihen genau diejenigen Funktionen, die sich lokal beliebig gut durch Polynome approximieren lassen. Dies spiegelt sich z.B. in der (lokalen) Nullstellenverteilung wider.

¹² Reelles Beispiel: Die Funktion $f(x) = e^{1/x}$ für $x < 0$, $f(x) = 0$ für $x \geq 0$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Ihre Taylor-Entwicklung um $x_0 = 1$ ist aber die gleiche wie die der Nullfunktion.



§ 2. DIE KOMPLEXE ABLEITUNG

Proposition 2.16. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $N_f = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ und $N_f^\infty = \{z \in U \mid f^{(n)}(z) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann gilt

- (i) N_f ist in U abgeschlossen.
- (ii) N_f^∞ ist in U offen und abgeschlossen.
- (iii) Besitzt N_f einen Häufungspunkt $y \in U$, so ist f auf der Zusammenhangskomponente von y in U identisch 0.

Beweis. (i) Die Aussage “ N_f ist in U abgeschlossen” bedeutet, dass für jede Folge $(z_n) \subset N_f \subset U$, welche in U konvergiert, der Grenzwert auch in N_f liegt. (bzw. äquivalent dazu, dass $U \setminus N_f$ offen in $\mathbb{C}$ ist). Sie folgt unmittelbar aus der Stetigkeit von f .

(ii) Auf die gleiche Weise impliziert die Stetigkeit der höheren Ableitungen $f^{(n)}$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $N_f^{(n)} = \{z \in U \mid f^{(n)}(z) = 0\}$ in U abgeschlossen ist. Daher ist auch $N_f^\infty = \bigcap_{n=0}^\infty N_f^{(n)}$ als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen. Ist $z_0 \in N_f^\infty$, so sind in der lokalen Potenzreihenentwicklung von f um z_0 alle Koeffizienten identisch 0 (s. Korollar 2.15). Da diese Potenzreihe f in einer Umgebung von z_0 in U treu darstellt, ist diese Umgebung gesamt in N_f^∞ enthalten. N_f^∞ ist also auch offen in U .

(iii) Die Zusammenhangskomponente Γ_y von $y \in U$ ist per Definition die maximale zusammenhängende Teilmenge von U , welche y enthält. Da U offen ist und Kreisscheiben zusammenhängend, ist auch Γ_y offen.¹³ Es genügt daher, den Fall $\Gamma_y = U$ zu betrachten, d.h. U als zusammenhängend vorauszusetzen. Dann impliziert (ii), dass N_f^∞ entweder leer oder ganz U ist. Das folgende Lemma 2.17 zeigt $y \in N_f^\infty$. Dann aber muss $N_f^\infty = U$ sein, d.h. f ist auf U identisch 0. $\square$

Lemma 2.17. Angenommen, $y \in U$ ist Häufungspunkt von N_f . Dann verschwindet die Potenzreihenentwicklung von f um y identisch. Insbesondere ist f in einer Umgebung von y identisch 0.

Beweis. Verschwindet die Potenzreihenentwicklung von f um y nicht identisch, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass in einer Umgebung von y

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k^{(y)}(z-y)^k = (z-y)^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}^{(y)}(z-y)^k}_{=: g(z)} \quad (2.43)$$

mit $a_n^{(y)} \neq 0$. Die durch die Restreihe dargestellte Funktion $g(z)$ erfüllt daher $g(y) = a_n^{(y)} \neq 0$ und ist in einer Umgebung von y stetig. Es existiert daher eine Umgebung $V \subset U$ von y so, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in V \setminus \{y\}$. y kann daher kein Häufungspunkt von N_f sein. $\nexists$ $\square$

¹³ Hier und zur Definition von Γ_y wird benutzt, dass die Vereinigung $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ einer Familie von zusammenhängenden Mengen mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ wieder zusammenhängend ist.¹⁴ Insbesondere ist Γ_y gleich der Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen, welche y enthalten.

¹⁴Ist $A \subset U_1 \cup U_2$, so gilt für alle i : $A_i \subset U_1 \cup U_2$, d.h. entweder $A_i = U_1 \cap A_i$ oder $A_i = U_2 \cap A_i$. Gilt für $i \neq j$ $A_i = U_1 \cap A_i$ aber $A_j = U_2 \cap A_j$, so ist $A_i \cap A_j = \emptyset$, im Widerspruch zu $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Es muss also entweder $A_i = U_1 \cap A_i$ für alle i sein oder $A_i = U_2 \cap A_i$ für alle i . Entsprechend ist entweder $A = U_1 \cap A$ oder $A = U_2 \cap A$.

Beispiel 2.18. Auf “grossen” Mengen betrachtet gibt es allerdings grosse Unterschiede im Abbildungsverhalten zwischen Polynomen und Potenzreihen. So verschwindet beispielsweise gemäss (2.35) die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ nirgends, während bereits $z \mapsto \exp(z) - 1$ und damit auch $\sin$ und $\cos$ unendlich viele Nullstellen besitzen.

Bemerkung. Prinzipiell kann man rein durch Manipulation von Potenzreihen zeigen, dass

- (i) die *Summe* und das *Produkt* zweier analytischer Funktionen wieder analytisch sind;
- (ii) falls f in einer Umgebung von z_0 analytisch ist mit $f(z_0) \neq 0$, so auch die *multiplikative Inverse* (die nach Proposition 2.16 in einer Umgebung von z_0 wohldefiniert ist) $z \mapsto f(z)^{-1}$;
- (iii) die *Komposition* von analytischen Funktionen (wo definiert) wieder analytisch ist;
- (iv) falls f in einer Umgebung von z_0 analytisch ist mit $f'(z_0) \neq 0$, so ist die *lokale Umkehrfunktion*¹⁵ $w \mapsto f^{-1}(w)$ (man sagt auch *kompositionelle Inverse*) auf einer Umgebung von $w_0 = f(z_0)$ wieder analytisch.

Dies erfordert zwar eine teils umfangreiche Buchführung, die man mit den Methoden der Funktionentheorie völlig vermeiden kann, so dass wir dies hier nicht im Detail durchführen. In der Praxis ist die konkrete Berechnung von Taylor-Koeffizienten durch Einsetzen von Potenzreihen ineinander allerdings so unumgänglich wie ziel führend (siehe Übungen).

Korollar 2.19 (Identitätssatz für analytische Funktionen). *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ zwei analytische Funktionen. Hat die Koinzidenzmenge $S := \{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in U , so gilt bereits $S = U$, d.h. $f \equiv g$.*

Beweis. Wende Prop. 2.16 (iii) auf $f - g$ statt f an. □

Die folgende Aussage lässt sich ebenfalls rein durch Manipulation von Potenzreihen beweisen.

Proposition 2.20 (Maximumprinzip für analytische Funktionen). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion.*

- (i) *Besitzt f ein Betragsmaximum, d.h. existiert $z_0 \in U$ so, dass $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in U$, so ist f konstant.*
- (ii) *Ist f nicht konstant und $z_0 \in U$ ein Betragsminimum, d.h. $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ für alle $z \in U$, so gilt $f(z_0) = 0$.*

Beweis. Übungsaufgabe □

¹⁵ Deren Existenz wird wegen der Verbindung zur zwei-dimensionalen Vektoranalysis durch den Satz über die Umkehrfunktion garantiert. Wir brauchen sie im Übrigen aber erst einmal nicht und beweisen sie dann mit rein funktionentheoretischen Methoden in Proposition 8.3. Bemerkenswert dabei ist, dass das Nicht-Verschwinden der Ableitung bereits ihre Invertierbarkeit impliziert, genau wie in der ein-dimensionalen reellen Differentialrechnung.

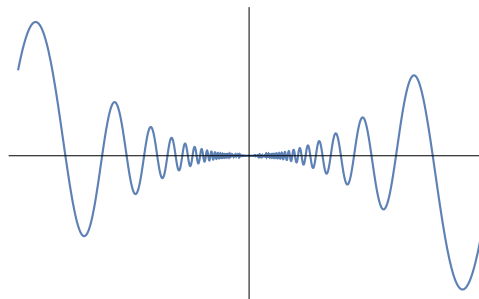
§ 2. DIE KOMPLEXE ABLEITUNG

Wir schliessen diesen § mit einigen weiteren Bemerkungen und Beispielen zum Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit, insbesondere zur Frage nach der *Fortsetzung einer auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion hinaus in die komplexe Ebene*.

Beispiele 2.21. Die Vorschrift

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

definiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, deren Ableitung $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $f'(0) = 0$ in $x = 0$ aber nicht stetig ist.



Diese Unstetigkeit (so wie alternativ die Häufung der Nullstellen bei $x_0 = 0$) signalisiert, dass f sich nicht zu einer holomorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Zwar ist nach den obigen Regeln die Funktion¹⁶

$$z \mapsto f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z} \quad (2.45)$$

für alle $z \neq 0$ komplex differenzierbar mit der formal gleichen Ableitung $f'(z) = 2z \sin \frac{1}{z} - \cos \frac{1}{z}$. Da aber für $z = iy$ rein imaginär $\sin \frac{1}{iy} = -i \sinh \frac{1}{y} \rightarrow \mp i\infty$ für $y \rightarrow 0_{\pm}$, hat f noch nicht mal einen Grenzwert bei $z_0 = 0$, kann also dort auch nicht komplex differenzierbar (geschweige denn analytisch) sein.

· Die in Fussnote 12 definierte reelle Funktion $f(x) = e^{1/x}$ für $x < 0$, $f(x) = 0$ für $x \geq 0$ ist zwar unendlich oft differenzierbar, in $x_0 = 0$ aber nicht analytisch (d.h., sie wird in keiner Umgebung von x_0 durch ihre Taylor-Reihe dargestellt). Auch dies wird eine Fortsetzung zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbaren Funktion verhindern.

Beispiel 2.22. Die Einschränkung der fundamental nicht holomorphen komplexen Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ (siehe Beispiel 2.6) auf die reelle Achse ist die Identität $x \mapsto x$, welche sich natürlich auf eine andere Weise zu einer komplex differenzierbaren Funktion, nämlich $z \mapsto z$, fortsetzen lässt.

Beispiel 2.23. Die holomorphe Funktion $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $Q(z) = z^2$ aus Beispiel 2.10 ist die Fortsetzung der Quadratabbildung $x \mapsto x^2$, die die nicht-negativen reellen Zahlen $\mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton, bijektiv und stetig auf sich selbst abbildet. Deren Umkehrabbildung $\text{sqrt} : u \mapsto \sqrt{u}$ ist überall ausser im Ursprung reell differenzierbar, lässt sich aber nicht zu einer auf der ganzen punktierten Ebene $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (stetigen, geschweige denn) holomorphen Funktion fortsetzen.

Begründung: In Polarkoordinaten (s. Gl. (1.12) und (2.36)) $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi = \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ (siehe Def. 1.5) lassen sich die beiden Wurzeln der Gleichung $w^2 = z$ schreiben als $w_1 = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ und $w_2 = -w_1 = \sqrt{r}e^{i\varphi/2+\pi i}$, wobei gemäss Warnung auf S. 6 im Allgemeinen $\text{Arg}(w_2) \neq \frac{\varphi}{2} + \pi$ ist. Stetigkeit erfordert, dass wir in der Nähe der positiven reellen Achse (d.h., für kleine φ), die Wahl $\text{sqrt}(z) = w_1$

¹⁶Man benutzt für die Fortsetzung einer reellen Funktion hinaus in die komplexe Ebene häufig das gleiche Symbol, solange dies nicht zu Missverständnissen führt.

treffen. Dies geht aber nur solange gut, wie $|\varphi| \lesssim \pi$ bleibt. Für festes $r = 1$ gilt etwa $\lim_{\varphi \uparrow \pi} e^{i\varphi/2} = e^{i\pi/2} = i$, $\lim_{\varphi \downarrow -\pi} e^{i\varphi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$. $\lim_{w \rightarrow -1} \text{sqrt}(w)$ existiert also nicht.

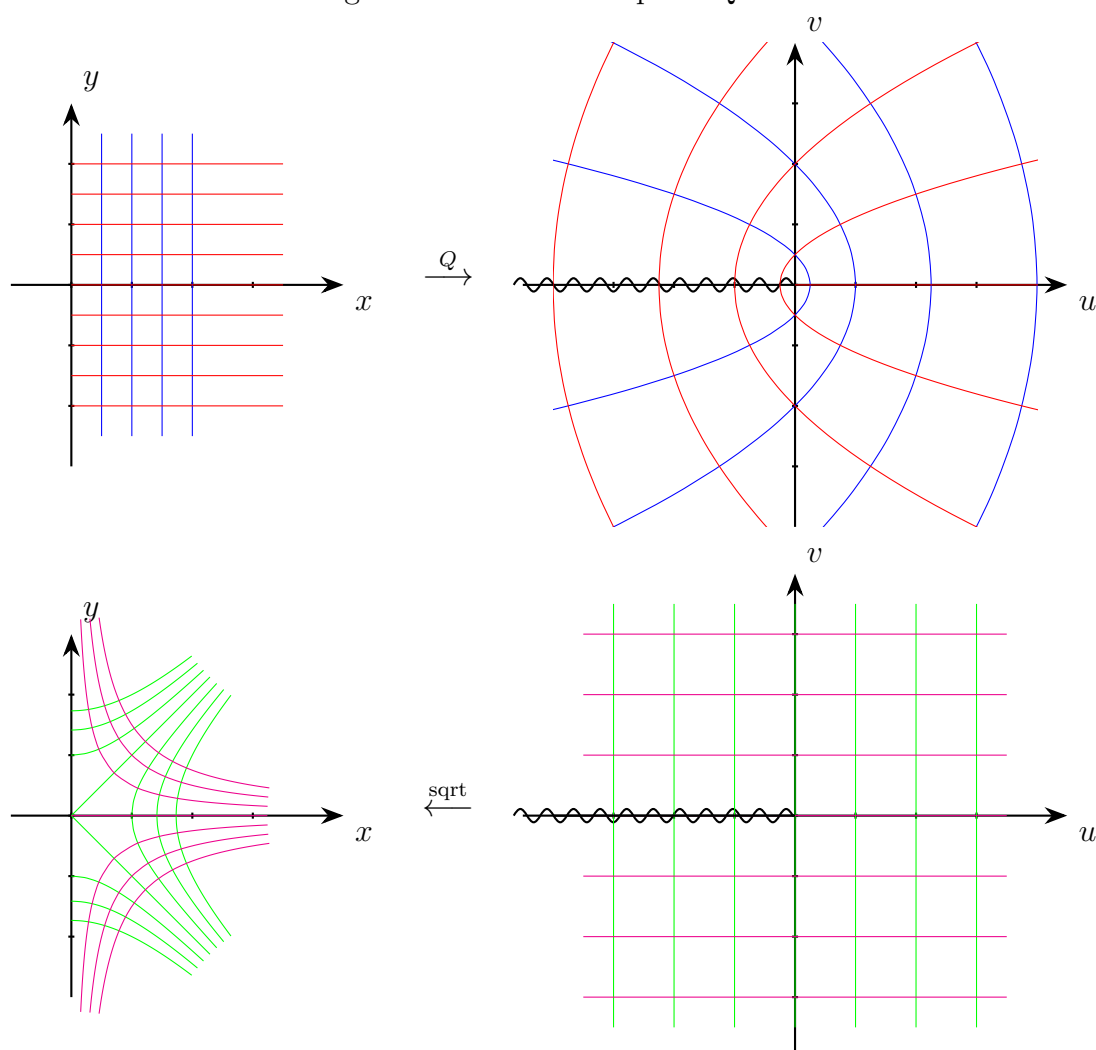
Formal: Die Einschränkung von Q auf die rechte Halbebene $\mathbb{W} := \{\text{Re}(z) > 0\}$ ist eine bijektive Abbildung auf die an der negativen reellen Achse *geschlitzte*¹⁷ Ebene $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Ihre Umkehrabbildung $\text{sqrt} : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{W}$ ist holomorph mit

$$\text{sqrt}'(w) = \frac{1}{2\text{sqrt}(w)} \quad (2.46)$$

Bew.: Lokal lässt sich die Aussage mittels Cauchy-Riemann-Gleichungen in Polarkoordinaten oder mit dem Satz über die Umkehrabbildung zeigen. In kartesischen Koordinaten ist $\mathbb{W} = \{(x, y) \mid x > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{(u, v) \mid v = 0 \Rightarrow u > 0\}$ und

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} + u}{2}}, \quad y = \text{sgn}(v) \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2}} \quad (2.47)$$

Darüber hinaus ist aber wichtig festzuhalten, dass $\mathbb{W}$ nicht die einzige mögliche Wahl eines maximalen Definitionsgebiets einer holomorphen Quadratwurzel ist.



¹⁷Die herausgenommene Menge $\mathbb{R}_{\leq 0} = (-\infty, 0] \subset \mathbb{C}$ heisst auch *Schnitt*.

§ 3. KOMPLEXE STAMMFUNKTIONEN

Beispiel 2.24. Die Einschränkung der Exponentialfunktion $\exp$ auf den Streifen $\mathbb{A} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi)\}$ ist eine Bijektion auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}_-$ wie oben definiert. Ihre Umkehrabbildung $\text{Log} : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{A}$ ist holomorph mit $\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}$, und heisst *Hauptzweig des komplexen Logarithmus*. In Polarkoordinaten: $\text{Log}(z) = \ln r + i\varphi = \ln |z| + i \text{Arg}(z)$, wo $\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ der aus der Analysis bekannte natürliche Logarithmus ist. (Übungsaufgabe)

§ 3 Komplexe Stammfunktionen

Während wir bei der Verallgemeinerung der *Differentiation* in Def. 2.3 die anschauliche Interpretation der Ableitung als “Steigung der Tangenten” durch den Begriff der “Drehstreckung” halbwegs retten konnten (s. Korollar 2.9), macht die fehlende Anordnung von $\mathbb{C}$ den Zusammenhang zwischen der *Integration* und einem geometrischen “Inhalt der Fläche unter dem Graphen” auf sehr lange Sicht völlig zunichte. Als eigentliche Motivation (nicht zuletzt im Hinblick auf die Lösung von Differentialgleichungen, s. Kapitel ??) bleibt (jedenfalls zunächst nur) die *Umkehrung der Ableitung* als (lineare) Abbildung zwischen entsprechenden Funktionenräumen. Das Endziel (das wir erst in § 10 abschliessend erreichen werden) sind *notwendige und hinreichende Kriterien an Funktionen und Definitionsbereiche für Existenz und Eindeutigkeit von Stammfunktionen* (vgl. auch Diskussion auf S. 8).

Definition 3.1. Eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ heisst (*komplexe*) *Stammfunktion* von $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, falls F auf ganz U komplex differenzierbar (d.h., holomorph) ist und $F'(z) = f(z) \forall z \in U$.

Dieser Begriff hat strukturell zunächst einmal die gleichen Eigenschaften wie in der reellen Analysis. Insbesondere:

- Sind F_1, F_2 Stammfunktionen von f_1, f_2 , so ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ $F_1 + \lambda F_2$ eine Stammfunktion von $f_1 + \lambda f_2$ (Linearität).
- Stammfunktionen sind stetig.
- $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann Stammfunktion der Nullfunktion, wenn F lokal konstant ist: In der Hinrichtung ist dies trivial, die Aussage $F'(z) = 0 \forall z \in U \Rightarrow F$ ist lokal konstant wurde in einer Übungsaufgabe mit Hilfe des reellen Schrankensatzes bewiesen. Sie folgt etwas zufriedenstellender auch aus der komplexen Integrationstheorie (Korollar 3.8), und bedeutet im Wesentlichen, dass unsere Leitfrage sich auf die Zusammenhangskomponenten von U reduzieren lässt. Dies führt zu unserer ersten allgemeinen Einschränkung an die Definitionsbereiche.

Definition 3.2. Eine offene und zusammenhängende¹⁸ Menge $D \subset \mathbb{C}$ heisst *Gebiet*.

Jede jemals errechnete Ableitung gibt auch ein Beispiel einer Stammfunktion, für die Praxis empfiehlt sich die Pflege einer entsprechenden Datenbank. Insbesondere aber können wir systematisch Polynome, Exponential- und trigonometrische Funktionen sowie allgemeiner jede Potenzreihe innerhalb ihrer Konvergenzscheibe

¹⁸äquivalent dazu: offen und wegzusammenhängend. Nach unserer Definition des Zusammenhangs sind Gebiete notwendigerweise nicht leer, s. Fussnote 4.

gliedweise integrieren. Die wesentliche Frage ist aber, ob wir wie in der Infinitesimalrechnung eine Stammfunktion allgemein durch Aufsummieren der Inkremente aus ihrer Ableitung “rekonstruieren” können. Ein Blick auf die Formeln der Analysis 1 zeigt, dass für die einfachste Umsetzung dieser Idee der Zusammenhang des Definitionsbereichs nicht das charakteristisch hinreichende Kriterium ist. Vielmehr ist zur Berechnung des *bestimmten Integrals* sicherzustellen, dass die Funktion an allen Stützstellen definiert ist.

Proposition 3.3. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a, b \in D$ so dass die Strecke von a nach b (BESSERE NOTATION: σ_{ab} ? BILDER!), $\gamma_{ab} := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\} \subset D$ ganz in D enthalten ist, und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann konvergiert die Folge*

$$S_n(f; a, b) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot \overbrace{f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)}^{\text{komplexe Multiplikation!}} \in \mathbb{C} \quad (3.1)$$

der “äquidistanten komplexen Riemannschen Summen”. Die Abbildung

$$\mathcal{C}^0(D, \mathbb{C}) \ni f \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; a, b) =: \int_{\gamma_{ab}} f(w) dw \in \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

die wir (liebevoll) Integral von a nach b nennen wollen, erfüllt

(i) *Linearität und Integration von Konstanten:* Für alle $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\int_{\gamma_{ab}} (f_1(w) + \lambda f_2(w) + 1) dw = \int_{\gamma_{ab}} f_1(w) dw + \lambda \int_{\gamma_{ab}} f_2(w) dw + (b - a)$$

$$(ii) \text{ Orientierungswechsel: }^{19} \int_{\gamma_{ab}} f(w) dw = - \int_{\gamma_{ba}} f(w) dw$$

$$(iii) \text{ Standardabschätzung: } \left| \int_{\gamma_{ab}} f(w) dw \right| \leq |b - a| \max\{|f(w)| \mid w \in \gamma_{ab}\}$$

Beweis. Wir erkennen in

$$S_n(f; a, b) = (b - a) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b - a)\right)}_{=: S_n(\tilde{f}; 0, 1)} \quad (3.3)$$

den zweiten Faktor als gewöhnliche Riemannsche Summe der (allenfalls als vektorwertig aufgefassten) komplexwertigen Funktion

$$\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(t) := f(a + t(b - a)) = f((1 - t)a + tb) \quad (3.4)$$

welche nach Voraussetzung $\gamma_{ab} \subset D$ wohl-definiert ist. Deren Eigenschaften folgen aus den gleichen Überlegungen wie in der Analysis 1: Wegen der Kompaktheit des Intervalls $[0, 1]$ ist die stetige Funktion $\tilde{f}$ dort gleichmäßig stetig. Insbesondere existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $|\tilde{f}(t_1) - \tilde{f}(t_2)| < \epsilon$ falls $|t_1 - t_2| < \delta$. Dann

¹⁹Die Notation γ_{ab} bezeichnet also die *gerichtete Verbindungsstrecke* von a nach b .

§ 3. KOMPLEXE STAMMFUNKTIONEN

folgt durch gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $0 < \frac{1}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$ und $0 < \frac{1}{m} < \dots < \frac{m-1}{m} < 1$ dass

$$|S_n(\tilde{f}; 0, 1) - S_m(\tilde{f}; 0, 1)| < \epsilon \quad (3.5)$$

falls $n, m \geq \frac{1}{\delta}$. $(S_n(\tilde{f}; 0, 1))_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge. Daraus folgt die Konvergenz und die übrigen genannten Eigenschaften trivialerweise. $\square$

Im Detail bedeutet das obige Ergebnis, dass wir zur “Integration der komplexwertigen Funktion $f = u + iv$ von a nach b ” Real- und Imaginärteil von $\tilde{f} = \tilde{u} + i\tilde{v}$ von 0 nach 1 integrieren und das Ergebnis mit der komplexen Zahl $b - a$ multiplizieren.

$$\int_{\gamma_{ab}} f(w)dw = (b - a) \cdot \int_0^1 \tilde{f}(t)dt = (b - a) \cdot \left(\underbrace{\int_0^1 \tilde{u}(t)dt}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\int_0^1 \tilde{v}(t)dt}_{\in \mathbb{R}} \right) \quad (3.6)$$

Unser Ansatz gründet also nicht nur auf der komplexen Multiplikation, sondern (überraschender Weise) auch auf dem gewöhnlichen Integral stetiger reeller Funktionen. Seine Sinnhaftigkeit kann durch eine erste Version der “zweiten Hälfte des komplexen Hauptsatzes” belegt werden, dass sich nämlich das Integral von a nach b mit Hilfe von (erratenen oder nachgeschauten) Stammfunktionen berechnen lässt.

Lemma 3.4. *Seien D , a, b und f wie in Prop. 3.3, und $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $F'(z) = f(z) \forall z \in D$ (d.h., eine Stammfunktion von f). Dann gilt*

$$\int_{\gamma_{ab}} f(w)dw = F(b) - F(a) \quad (3.7)$$

Beweis. Da D offen ist, ist für genügend kleines $\epsilon > 0$ auch die leicht verlängerte Verbindungsstrecke, $\gamma_{ab}^\epsilon := \{a + t(b - a) \mid t \in (-\epsilon, 1 + \epsilon)\}$ noch ganz in D enthalten. Dann folgt aus der Kettenregel der Vektoranalysis, dass die komplexwertige Funktion einer reellen Variablen

$$\tilde{F} : (-\epsilon, 1 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{F}(t) := F(a + t(b - a)) \in \mathbb{C} \quad (3.8)$$

(reell) differenzierbar ist mit der Ableitung²⁰

$$\dot{\tilde{F}}(t) = \frac{d}{dt} F(a + t(b - a)) = F'(a + t(b - a)) \cdot (b - a) = (b - a) \cdot \tilde{f}(t) \in \mathbb{C} \quad (3.9)$$

$\tilde{F}$ ist also eine Stammfunktion von $(b - a) \cdot \tilde{f}$ (fortgesetzt auf $(-\epsilon, 1 + \epsilon)$). Wegen der Linearität des Integrals folgt daher aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{\gamma_{ab}} f(w)dw = \int_0^1 (b - a) \cdot \tilde{f}(t)dt = \tilde{F}(1) - \tilde{F}(0) = F(b) - F(a) \quad (3.10)$$

$\square$

²⁰ $\tilde{F}$ ist die Verkettung der Abbildung $(-\epsilon, 1 + \epsilon) \ni t \mapsto a + t(b - a) \in D$ mit $F : D \rightarrow \mathbb{C}$. Die Anwendung der “äusseren Ableitung” F' (als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) auf die “innere” $b - a$ entspricht dabei wieder gemäss Lemma 1.3 der (kommutativen) komplexen Multiplikation.

Fazit: Der Faktor $b-a$ in (3.6) ist die Ableitung der *Parametrisierung* $t \mapsto a+t(b-a)$ von γ_{ab} nach t .

Ein weiterer Blick in die Analysis 1 verrät nun allerdings, dass die Ergebnisse von Proposition 3.3 und Lemma 3.4 für die *Definition* einer Stammfunktion (als Integralfunktion bezüglich einem möglichst beliebigen Basispunkt) noch nicht ausreichen. Wir müssen nicht nur sicherstellen, dass die erforderlichen Integrale alle definiert sind, sondern benötigen neben den Eigenschaften (i), (ii), (iii) als vierte noch die all-entscheidende *Additivität im Integrationsbereich*.

Proposition 3.5. *Eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen und konvexen²¹ Menge $D \subset \mathbb{C}$ besitzt dann und nur dann eine komplexe Stammfunktion, wenn für alle $a, b, c \in D$ gilt:*

$$\int_{\gamma_{ab}} f(w)dw + \int_{\gamma_{bc}} f(w)dw = \int_{\gamma_{ac}} f(w)dw, \quad (3.11)$$

bzw. wegen Proposition 3.3 (ii) äquivalent dazu:

$$\int_{\gamma_{ab}} f(w)dw + \int_{\gamma_{bc}} f(w)dw + \int_{\gamma_{ca}} f(w)dw = 0 \quad (3.12)$$

Beweis. Ist $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f , so folgt aus Lemma 3.4 sofort

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{ab}} f(w)dw + \int_{\gamma_{bc}} f(w)dw + \int_{\gamma_{ca}} f(w)dw &= \\ F(b) - F(a) + F(c) - F(b) + F(a) - F(c) &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Gilt umgekehrt (3.11) für alle $a, b, c \in D$, so wählen wir $z_* \in D$ beliebig und definieren für $z \in D$

$$F_{z_*}(z) := \int_{\gamma_{z_*z}} f(w)dw \quad (3.14)$$

als *unbestimmtes Integral*.

Beh.: $F_{z_*} : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist in jedem $z_0 \in D$ komplex differenzierbar mit $F'_{z_*}(z_0) = f(z_0)$.

Bew.: Wir überprüfen Def. 2.3 (v). Für alle $z \in D$ folgt unter Benutzung von Prop. 3.3 (i), (ii) und (iii)

$$\begin{aligned} |F_{z_*}(z) - F_{z_*}(z_0) - (z - z_0)f(z_0)| &= \left| \int_{\gamma_{z_*z}} f(w)dw - \int_{\gamma_{z_*z_0}} f(w)dw - \int_{\gamma_{z_0z}} f(z_0)dw \right| \\ &= \left| \int_{\gamma_{z_0z}} (f(w) - f(z_0))dw \right| \\ &\leq |z - z_0| \max\{|f(w) - f(z_0)| \mid w \in \gamma_{z_0z}\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Wegen der Stetigkeit von f (in z_0) existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $|f(w) - f(z_0)| < \epsilon$ falls $w \in B_\delta(z_0) \cap D$. Für alle $z \in B_\delta(z_0) \cap D$ ist $\gamma_{z_0z} \subset B_\delta(z_0) \cap D$, d.h. es gilt $|f(w) - f(z_0)| < \epsilon$ für alle $w \in \gamma_{z_0z}$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

²¹Konvexe Mengen sind automatisch wegzusammenhängend, also auch zusammenhängend.

§ 3. KOMPLEXE STAMMFUNKTIONEN

Der Witz ist nun, dass die Bedingung (3.12) im Komplexen hochgradig nicht offensichtlich ist: In der Definition (3.1) sind die Stützstellen auf den drei Verbindungsstrecken im Allgemeinen weit voneinander entfernt, so dass eine gegenseitige Aufhebung unwahrscheinlich erscheint. (Im Reellen ist dies völlig anders, wie wir gleich wiederholen.) In der Identifikation (3.6) verhindert der Vorfaktor $b - a$ eine Rückführung auf die Additivität des reellen Integrals, es sei denn natürlich, a, b, c sind kollinear oder fallen zusammen.

Beispiel. $f(z) = \bar{z}$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1 + i$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{01}} \bar{w} dw &= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \\ \int_{\gamma_{1(1+i)}} \bar{w} dw &= i \int_0^1 \overline{(1+it)} dt = i \int_0^1 (1-it) dt = i + \frac{1}{2} \\ \int_{\gamma_{0(1+i)}} \bar{w} dw &= (1+i) \int_0^1 (1-i)t dt = 2 \cdot \int_0^1 t dt = 1 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Das heisst also: $\int_{\gamma_{01}} + \int_{\gamma_{1(1+i)}} \neq \int_{\gamma_{0(1+i)}} \quad \text{!!!!}$

Von dieser Warte aus gesehen ist also schon die Existenz von Stammfunktionen (für Polynome, Potenzreihen etc.) überhaupt recht überraschend. Umso erstaunlicher (aber irgendwie beruhigend) ist der enge Zusammenhang zur komplexen Differenzierbarkeit.

Lemma 3.6 (Cauchy/Goursat-Pringsheim). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und konvex. Dann gilt die Aussage (3.12), falls f auf D holomorph ist!*

Beweis. Im Reellen folgt (3.11) im Fall $a \leq b \leq c$ so gut wie trivialer Weise aus der Definition durch eine gemeinsame Verfeinerung der Intervall-Zerlegungen, für andere Anordnungen mit Hilfe der Orientierungsumkehr. Für die Beschreibung des komplexen Analogons benutzen wir (wenn auch formal natürlich nicht nötig) die Visualisierung von $\mathbb{C}$ als zwei-dimensionale euklidische Ebene und daraus abgeleitete geometrische Sprechweisen.

Für je drei Punkte $o, p, q \in \mathbb{C}$ bezeichne $\blacktriangle(o, p, q)$ das (allenfalls entartete) Dreieck mit diesen Punkten als Ecken und $\triangle(o, p, q)$ seinen Rand.²² Beides sind kompakte Teilmengen von $\mathbb{C}$. Der *Durchmesser* (definiert als maximaler Abstand zweier Punkte) ist $\text{diam } \blacktriangle(o, p, q) = \max\{|p-o|, |q-p|, |o-q|\}$ und der *Umfang* $|\triangle(o, p, q)| := |p-o| + |q-p| + |o-q|$. Für $o, p, q \in D$ ist wegen der Konvexität von D auch $\blacktriangle(o, p, q) \subset D$.²³ Wir schreiben dann

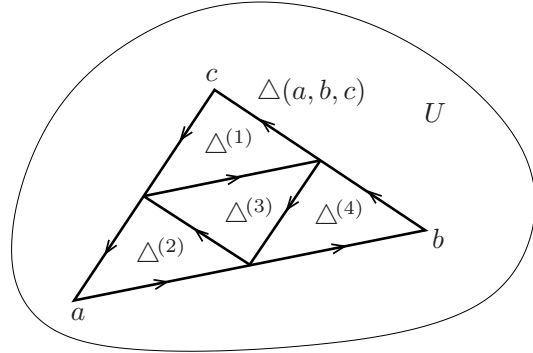
$$\int_{\triangle(o, p, q)} f(w) dw = \int_{\gamma_{op}} f(w) dw + \int_{\gamma_{pq}} f(w) dw + \int_{\gamma_{qo}} f(w) dw \tag{3.17}$$

²² Formal ist $\triangle(o, p, q) = \gamma_{op} \cup \gamma_{pq} \cup \gamma_{qo}$ und $\blacktriangle(o, p, q) = \{ro+sp+tq \mid r, s, t \geq 0 \text{ und } r+s+t=1\}$ (die *konvexe Hülle* von o, p, q).

²³ Dies folgt formal sofort aus Fussnote 22.

für das “Integral über der Rand” in der angegebenen Orientierung. Man sieht sofort, dass $\int_{\Delta(o,p,q)} f(w)dw = \int_{\Delta(p,q,o)} f(w)dw = -\int_{\Delta(o,q,p)} f(w)dw$ gemäss Prop. 3.3 (ii).

Die Behauptung ist also, dass für je drei Punkte $a, b, c \in D$, $\int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw = 0$, falls f holomorph ist. Wir zeigen dafür, dass für jedes $\epsilon > 0$ $|\int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw| < \epsilon$. Dazu zerteilen wir $\blacktriangle(a, b, c)$ durch Halbieren der Seiten in vier kongruente Dreiecke, deren Ränder $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ und $\Delta^{(4)}$, wir in einer Weise orientieren, dass²⁴



$$\int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw = \sum_{i=1}^4 \int_{\Delta^{(i)}} f(w)dw \quad (3.18)$$

Gemäss Behauptung ist jeder der vier Terme auf der rechten Seite ebenfalls null. Ohne dies zu wissen, suchen wir ein jeniges Dreieck aus, für das der Wert des Integrals (im Absolutbetrag) das Maximum von allen vieren ist, und bezeichnen es mit $\blacktriangle_1$, seinen Rand mit Δ_1 . Mit $\Delta_0 := \Delta(a, b, c)$, $\blacktriangle_0 := \blacktriangle(a, b, c)$ gilt dann

$$\left| \int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw \right| = \left| \int_{\Delta_0} f(w)dw \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\Delta_1} f(w)dw \right| \quad (3.19)$$

Nun zerteilen wir analog $\blacktriangle_1$, suchen das Maximum der vier Integrale und bezeichnen das zugehörige Dreieck mit $\blacktriangle_2$. Durch Wiederholen des Verfahrens erhalten wir eine Folge $(\blacktriangle_n)$ von Dreiecken mit Rändern (Δ_n) , über die

$$\left| \int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\Delta_n} f(w)dw \right| \quad (3.20)$$

Wegen der Kongruenz der Dreiecke gilt $\text{diam } \blacktriangle_n = 2^{-n} \text{diam } \blacktriangle_0$ und $|\Delta_n| = 2^{-n} |\Delta_0|$, sie bilden also Nullfolgen. Ausserdem ist $\blacktriangle_{n+1} \subset \blacktriangle_n$ für alle n . Nach dem verallgemeinerten *Intervallschachtelungsprinzip*²⁵ existiert daher genau ein Punkt $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \blacktriangle_n$.

Da f nach Voraussetzung in z_0 komplex differenzierbar ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon \cdot |z - z_0| \quad (3.21)$$

falls $z \in D$, $|z - z_0| < \delta$. Sei nun n so gross, dass $\text{diam } \blacktriangle_n < \delta$. Dann ist für alle $w \in \Delta_n$ $|w - z_0| \leq \text{diam } \blacktriangle_n < \delta$. Da $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ als Polynom eine

²⁴Wir verwenden hier, dass die Seitenmittelpunkte kollinear zu den jeweiligen Ecken sind, und dass die Additivität (3.11) in solchen Spezialfällen (trivialerweise) aus der Intervalladditivität des reellen Integrals folgt (bzw. direkt aus Proposition 3.3).

²⁵Ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Folge von Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) derart, dass gilt:

- (i) $\forall k \in \mathbb{N}$ ist A_k nicht-leer, abgeschlossen und beschränkt.
- (ii) $A_{k+1} \subset A_k \forall k$
- (iii) $\text{diam } A_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Dann existiert genau ein $x \in \bigcap_{l=1}^{\infty} A_l$.

§ 3. KOMPLEXE STAMMFUNKTIONEN

Stammfunktion (auf ganz $\mathbb{C}$) besitzt, gilt $\int_{\Delta_n} (f(z_0) + (w - z_0)f'(z_0))dw = 0$ und daher

$$\int_{\Delta_n} f(w)dw = \int_{\Delta_n} (f(w) - f(z_0) - f'(z_0)(w - z_0))dw \quad (3.22)$$

Mit Hilfe der Standardabschätzung aus Proposition 3.3 (iii) und (3.21) folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta_n} f(w)dw \right| &\leq \sup\{|f(w) - f(z_0) - f'(z_0)(w - z_0)| \mid w \in \Delta_n\} \cdot |\Delta_n| \\ &\leq \epsilon \cdot \text{diam } \blacktriangle_n \cdot |\Delta_n| \\ &\leq \epsilon \cdot \frac{\text{diam } \blacktriangle_0}{2^n} \cdot \frac{|\Delta_0|}{2^n} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Mit (3.20) folgt

$$\left| \int_{\Delta(a,b,c)} f(w)dw \right| \leq \epsilon \cdot \text{diam } \blacktriangle(a, b, c) \cdot |\Delta(a, b, c)| \quad (3.24)$$

und daraus die Behauptung. $\square$

Man beachte, dass das anfangs etwas überraschende Kürzen der Zweierpotenzen in (3.24) eine natürliche Konsequenz daraus ist, dass bei der Zerlegung der Dreiecke das Produkt aus Durchmesser und Umfang umgekehrt skaliert wie ihre Anzahl in (3.20). Auch die lokalen Betrachtungen in (3.22) sind im Sinne des Stokesschen Satzes eigentlich nur eine Folge der Cauchy-Riemann Gleichungen. Wirklich “magisch” ist erst, dass die komplexe Differenzierbarkeit des Integranden nicht nur hinreichend sondern tatsächlich auch *notwendig* ist für die Gültigkeit von (3.12). Und hierfür ist entscheidend, dass die Integrationswege Kodimension 1 haben, wie wir im nächsten § sehen werden. Zur Vorbereitung erweitern wir hier noch leicht und behutsam die Definition des “Integrals von a nach b ” aus Proposition 3.3. Motivation dabei ist die Erkenntnis, dass *falls eine Stammfunktion existiert*, es zu ihrer Rekonstruktion nicht darauf ankommt, “wie genau wir von a nach b kommen”, Hauptsache, wir kommen an.

Korollar 3.7. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein (nicht notwendig konvexes) Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt für jedes Tupel $(a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b) \subset D$ mit $\gamma_{a_{i-1}a_i} \subset D$ für alle i*

$$\int_{\gamma_{a_0a_1}} f(w)dw + \int_{\gamma_{a_1a_2}} f(w)dw + \dots + \int_{\gamma_{a_{n-1}a_n}} f(w)dw = F(b) - F(a) \quad (3.25)$$

Insbesondere hängt das Integral über den Polygonzug nur von seinen Endpunkten ab.

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 3.4. $\square$

Korollar 3.8. *Sei $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $F' = 0$. Dann ist F konstant.*

Beweis. Man zeigt zunächst,²⁶ dass die Klassen der Äquivalenzrelation “ a und b können durch einen Polygonzug in D ” verbunden werden, offen in D sind. Da D zusammenhängend ist, gibt es nur eine solche Klasse und dann folgt die Aussage sofort aus Korollar 3.7 (und der Linearität des Integrals). $\square$

²⁶durch Reduktion auf offene Kreisscheiben, vgl. auch den Beweis von offen und zusammenhängend $\Rightarrow$ wegzusammenhängend

Definition 3.9. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Ein *Weg in U von a nach b* , beides Punkte in U , ist eine stetige Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ von einem kompakten Intervall $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ nach U mit $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$. Ein Weg heisst

(i) *stetig differenzierbar*, falls γ differenzierbar ist und die Ableitung²⁷ $\dot{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

(ii) *stückweise stetig differenzierbar*, falls eine Zerlegung $\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \beta$ existiert so, dass $\gamma_i := \gamma|_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]}$ stetig differenzierbar ist für alle $i = 1, \dots, n$.

Definition 3.10. Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg in U und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so definieren wir das *Integral von f über (oder entlang) γ* als das Integral der komplexwertigen Funktion $f \circ \gamma \cdot \dot{\gamma}$ über das Parameterintervall, d.h.

$$\int_{\gamma} f(w) dw := \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \quad (3.26)$$

hier ist wieder die Multiplikation in $\mathbb{C}$ versteckt!

Ist γ stückweise stetig differenzierbar, so setzen wir

$$\int_{\gamma} f(w) dw := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(w) dw \quad (3.27)$$

Die *Länge eines Wegs* ist die nicht-negative reelle Zahl

$$l(\gamma) := \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)| dt \quad (\text{bzw. } \sum_{i=1}^n l(\gamma_i)) \quad (3.28)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 Absolutbetrag/euklidische Länge

Lemma 3.11. (i) Für $\gamma_{ab} \subset U$ ist das Integral von a nach b aus Proposition 3.3 gleich dem Integral über $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, $\gamma(t) = a + t(b - a)$.

(ii) Das Integral über γ ist linear in f und genügt der Standardabschätzung²⁸

$$\left| \int_{\gamma} f(w) dw \right| \leq l(\gamma) \max\{|f(w)| \mid w \in \gamma([\alpha, \beta])\} \quad (3.29)$$

(iii) Ist $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_{\gamma} f(w) dw = F(b) - F(a) \quad (3.30)$$

Beweis. (i) war eine Beobachtung auf S. 26. (ii) folgt aus der Monotonie des reellen Standardintegrals, (iii) wieder aus dem gewöhnlichen Hauptsatz (nämlich, $F(\gamma(t))$ ist eine Stammfunktion von $f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$). $\square$

Eine wichtige Eigenschaft des Integrals über γ ist seine *Reparametrisierungsinvarianz*.

²⁷für die wir zur Unterscheidung von der komplexen Ableitung Physik-Notation verwenden

²⁸max = sup da stetige Bilder von kompakten Mengen kompakt sind.

§ 3. KOMPLEXE STAMMFUNKTIONEN

Definition 3.12. (i) Eine *Reparametrisierung* eines Wegs $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ ist der Weg $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ für eine stetige Abbildung $\tau : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \rightarrow [\alpha, \beta]$ mit $\tau(\tilde{\alpha}) = \alpha$, $\tau(\tilde{\beta}) = \beta$.
(ii) Die *Orientierungswechsel*²⁹ eines Wegs $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ von a nach b ist der Weg $\bar{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ von b nach a , definiert durch³⁰

$$\bar{\gamma}(\bar{t}) = \gamma(\beta + \alpha - \bar{t}) \quad (3.31)$$

(iii) Ist $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow U$ ein Weg von a nach b und $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \rightarrow U$ ein Weg von b nach c , so ist die *Verkettung (oder Aneinanderreihung)* von γ_1 und γ_2 der Weg $\gamma_1 \star \gamma_2 : [\alpha_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \rightarrow U$ von a nach c ,³¹

$$\gamma_1 \star \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [\alpha_1, \beta_1] \\ \gamma_2(t - \beta_1 + \alpha_2) & t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \end{cases} \quad (3.32)$$

Lemma 3.13. (i) Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ stückweise stetig differenzierbar, so ist jede stückweise stetig differenzierbare Reparametrisierung $\tilde{\gamma}$ wieder stückweise stetig differenzierbar und es gilt³²

$$\int_{\gamma} f(w)dw = \int_{\tilde{\gamma}} f(w)dw \quad (3.33)$$

sowie

$$l(\gamma) \leq l(\tilde{\gamma}) \quad (3.34)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn die Reparametrisierungsabbildung monoton ist.

(ii) Unter Orientierungswechsel gilt

$$\int_{\bar{\gamma}} f(w)dw = - \int_{\gamma} f(w)dw \quad (3.35)$$

sowie

$$l(\bar{\gamma}) = l(\gamma) \quad (3.36)$$

(iii) Für die Verkettung zweier stückweise stetig differenzierbarer Wege gilt

$$\int_{\gamma_1 \star \gamma_2} f(w)dw = \int_{\gamma_1} f(w)dw + \int_{\gamma_2} f(w)dw \quad (3.37)$$

sowie

$$l(\gamma_1 \star \gamma_2) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \quad (3.38)$$

²⁹Man sagt auch *der zu γ entgegengesetzte Weg*

³⁰Die Verwechslungsgefahr mit dem komplex konjugierten Weg ist in der Praxis klein.

³¹Dies ist wohldefiniert und stetig wegen $\gamma_1(\beta_1) = b = \gamma_2(\alpha_2)$ und stückweise stetig differenzierbar, falls γ_1 und γ_2 dies sind.

³²Für jede stetige Funktion f . — Besitzt f eine Stammfunktion, so folgt die Reparametrisierungsinvarianz ja trivialerweise aus (3.30).

Beweis. Es genügt, γ und τ als stetig differenzierbar vorauszusetzen. Dann folgt mit Hilfe der Substitutionsregel $t = \tau(\tilde{t})$ und der Kettenregel aus der Analysis 1:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(w)dw &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\gamma(\tau(\tilde{t})))\dot{\gamma}(\tau(\tilde{t}))\frac{d\tau}{d\tilde{t}}d\tilde{t} \\ &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{t}))\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t})d\tilde{t} = \int_{\tilde{\gamma}} f(w)dw \end{aligned} \quad (3.39)$$

Fast(!) genauso:

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)|dt = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} |\dot{\gamma}(\tau(\tilde{t}))|\frac{d\tau}{d\tilde{t}}d\tilde{t} \leq \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} |\dot{\gamma}(\tau(\tilde{t}))|\left|\frac{d\tau}{d\tilde{t}}\right|d\tilde{t} \\ &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} |\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t})|d\tilde{t} = l(\tilde{\gamma}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Wegen der Monotonie des Integrals (3.28) (und der Stetigkeit) gilt Gleichheit dann und nur dann wenn $\frac{d\tau}{d\tilde{t}} = \left|\frac{d\tau}{d\tilde{t}}\right| \geq 0$ für alle $\tilde{t}$, d.h. wenn τ monoton³³ ist.

Der Nachweis von (ii) geht mit $t = \tau(\bar{t}) = \beta + \alpha - \bar{t}$ sehr ähnlich:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(w)dw &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt \stackrel{\text{Achtung: } \tau(\alpha) = \beta, \tau(\beta) = \alpha}{=} \int_{\beta}^{\alpha} f(\gamma(\tau(\bar{t})))\dot{\gamma}(\tau(\bar{t}))\frac{d\tau}{d\bar{t}}d\bar{t} \stackrel{= -1, \text{ egal}}{=} \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} f(\tilde{\gamma}(\bar{t}))\dot{\tilde{\gamma}}(\bar{t})d\bar{t} = - \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(\bar{t}))\dot{\tilde{\gamma}}(\bar{t})d\bar{t} = - \int_{\tilde{\gamma}} f(w)dw \end{aligned} \quad (3.41)$$

bzw.

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)|dt = \int_{\beta}^{\alpha} |\dot{\gamma}(\tau(\bar{t}))|\frac{d\tau}{d\bar{t}}d\bar{t} \stackrel{= -1 = -|\frac{d\tau}{d\bar{t}}| !!}{=} - \int_{\beta}^{\alpha} |\dot{\tilde{\gamma}}(\bar{t})|d\bar{t} = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\tilde{\gamma}}(\bar{t})|d\bar{t} = l(\tilde{\gamma}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

(iii) ist trivial. (Man beachte allerdings, dass dies nicht die “Additivität im Integrationsbereich” ist, für die wir in Lemma 3.6 Holomorphie des Integranden vorausgesetzt haben!) $\square$

In Folge der Reparametrisierungsinvarianz hängt das Integral über γ nur vom Bild $\gamma([\alpha, \beta])$ als orientierte(!) Teilmenge von U ab.³⁴ Man nennt dieses auch *Spur des Weges*, *Kontur* oder *Kurve*, und einen Weg dementsprechend *parametrisierte Kurve*.

Ein Weg heisst *regulär*, falls er stückweise stetig differenzierbar ist und für alle i $\dot{\gamma}_i(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$. Man beachte dabei, dass an den Endpunkten der

³³aber nicht notwendig streng monoton

³⁴Man denke an dieser Stelle vor allem an *einfache* (d.h., selbstüberschneidungsfreie) Kurven, Bilder von injektiven Wegen. Siehe § 6 für weitere Bemerkungen zum allgemeinen Fall.

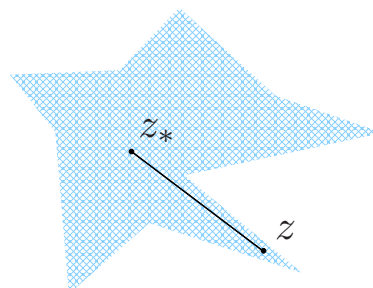
§ 4. CAUCHY-FORMELN

Intervalle Differenzierbarkeit über einseitige Grenzwerte definiert ist. Dementsprechend hat ein stückweise stetig differenzierbarer Weg an den Zerlegungspunkten möglicherweise zwei verschiedene Ableitungen. Für die Regularität müssen beide nicht null sein. Ein Kurve ist regulär, falls sie eine reguläre stetig differenzierbare Parametrisierung zulässt. Man überlege sich, dass Regularität nicht reparametrisierungsinvariant ist und sich auch eine nicht reguläre Kurve stetig differenzierbar parametrisieren lassen kann. In jedem Fall werden im Folgenden³⁵ Wege aber stets als stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt, falls nötig mit einer stillschweigenden Summe über die Stücke.

Definition 3.14. Ein *geschlossener Weg* (oder *Kurve*) ist ein Weg (Kurve) mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, $a = b$, die man dementsprechend vergisst. Ein geschlossener Weg heisst auch *Schleife*.

Übungsaufgabe.

- Man folgere aus Lemma 3.6: Ist U ein Sterngebiet, d.h. existiert ein “Sternmittelpunkt” $z_* \in U$ so, dass $\forall z \in U$ die Strecke $\gamma_{z_*z} \subset U$, dann besitzt jede holomorphe Funktion auf U eine komplexe Stammfunktion.



- Man lege sich auch Rechenschaft darüber ab, dass wenn $a < b \in \mathbb{R}$ und f eine holomorphe Fortsetzung von einem offenen Intervall $I \supset [a, b]$ auf eine offene Umgebung $U \supset I$ hinaus in die komplexe Ebene besitzt, $\int_{\gamma_{ab}} f(w)dw = \int_a^b f(t)dt$. In diesem Zusammenhang ist (3.26) nichts anderes als die gewöhnliche Substitutionsregel selber.

§ 4 Cauchy-Formeln

In der Praxis schreibt man wegen der Reparametrisierungsinvarianz Integrale über einen Weg normalerweise synonym als Integral über die Bildkurve $\gamma([\alpha, \beta])$, mit einer impliziten Orientierung. Häufig greift man auch auf Bilder zurück, ohne Parametrisierungen explizit anzugeben. Als Bausteine dienen dabei neben den bereits diskutierten geraden Strecken $\gamma_{ab} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + t(b - a)$ vor allem Kreise und Kreisbögen. Zur Erinnerung (s. Def. 1.7): Die offene Kreisscheibe vom Radius R um $z_0 \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch $B_R(z_0) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| < R\}$, die abgeschlossene durch $\overline{B}_R(z_0) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| \leq R\}$. Der *Kreis* (oder *Kreislinie*),

$$C_R(z_0) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| = R\} = \overline{B}_R(z_0) \setminus B_R(z_0) \quad (4.1)$$

ist der Rand dieser Scheiben. Wir schreiben jetzt für die geschlossene Kurve mit Spur $C_R(z_0)$ in der positiven Orientierung (d.h. gegen den Uhrzeigersinn) $C_R^+(z_0)$ und in

³⁵mit Ausnahme von § 6

der negativen Orientierung $C^-(z_0)$. Gebräuchliche Wege (d.h., Parametrisierungen der Kurve) sind

$$\gamma^\pm : [0, 1] \ni t \mapsto z_0 + Re^{\pm 2\pi it} \quad (4.2)$$

sowie

$$\hat{\gamma}^\pm : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + Re^{\pm it} \quad (4.3)$$

Es gilt $\dot{\gamma}^\pm = \pm 2\pi i Re^{\pm 2\pi it}$ und

$$l(\gamma^\pm) = \int_0^1 |2\pi i Re^{\pm 2\pi it}| dt = 2\pi R \quad (4.4)$$

sowie $\dot{\hat{\gamma}}^\pm = \pm i Re^{\pm it}$ und (wie es sein muss)

$$l(\hat{\gamma}^\pm) = \int_0^{2\pi} |i Re^{\pm it}| dt = 2\pi R \quad (4.5)$$

Das Interesse an geschlossenen Kurven gründet auf der folgenden, an die Definition 3.10 angepasste Verallgemeinerung des Hauptsatzkriteriums 3.5.

Proposition 4.1. *Eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ besitzt dann und nur dann eine komplexe Stammfunktion, wenn für jeden geschlossenen Weg γ in D*

$$\int_\gamma f(w)dw = 0 \quad (4.6)$$

Beweis. Die Notwendigkeit folgt unmittelbar aus (3.30). Umgekehrt ist nach Wahl von $z_* \in D$ für jedes $z \in D$ die Zuordnung

$$F_{z_*}(z) := \int_{\gamma(z_*, z)} f(w)dw \quad (4.7)$$

unter Voraussetzung von (4.6) unabhängig von der Wahl des Weges $\gamma(z_*, z)$ von z_* nach z .³⁶ Aus dem gleichen Grund gilt für jedes $z_0 \in D$

$$F_{z_*}(z) = F_{z_*}(z_0) + \int_{\gamma_{z_0 z}} f(w)dw \quad (4.8)$$

für alle z in einer konvexen Umgebung von z_0 in D .³⁷ Die Differenzierbarkeit und $F'_{z_*}(z) = f(z)$ folgt damit aus (dem Beweis von) Proposition 3.5. $\square$

Dies ist alles schön und gut, allein für die Gültigkeit von (4.6) kennen wir bisher nur ein auf sehr spezielle (nämlich, konvexe) Gebiete eingeschränktes, und scheinbar sehr starkes Kriterium (nämlich, die komplexe Differenzierbarkeit, siehe Lemma 3.6). Dass die Holomorphie *allgemein auch notwendig* ist, zeigen wir gleich. Dass sie für *allgemeine Mengen nicht hinreicht*, zeigt die folgende, für die Funktionentheorie fundamentale Rechnung.

³⁶Ist nämlich $\tilde{\gamma}(z_*, z)$ ein weiterer Weg von z_* nach z , so ist $\gamma(z_*, z) \star \bar{\tilde{\gamma}}(z, z_*)$ geschlossen und daher gilt $\int_{\gamma(z_*, z)} f(w)dw - \int_{\tilde{\gamma}(z_*, z)} f(w)dw = \int_{\gamma(z_*, z) \star \bar{\tilde{\gamma}}(z, z_*)} f(w)dw = 0$.

³⁷Bitte den γ -Missbrauch zu entschuldigen.

§4. CAUCHY-FORMELN

Beispiel 4.2. Das Integral der (holomorphen) Funktion $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z}$ über den Kreis vom Radius $R > 0$ um den Nullpunkt ist

$$\begin{aligned} \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{w} dw &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} \frac{d}{dt}(Re^{it}) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt \\ &= 2\pi i \end{aligned} \quad (4.9)$$

und insbesondere nicht Null. $z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ also keine Stammfunktion. Man bemerke aber, dass (4.9) unabhängig von R ist, und rechne zur Sicherheit noch einmal für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\int_{C_R^+(z_0)} \frac{1}{w - z_0} dw = 2\pi i \quad \text{und auch noch} \quad \int_{C_R^-(z_0)} \frac{1}{w - z_0} dw = -2\pi i \quad (4.10)$$

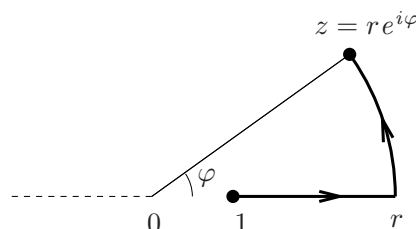
Beispiel 4.3. Die holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion. Hingegen ist, siehe Beispiel 2.24, auf der *geschlitzten Ebene* $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ der Hauptzweig des Logarithmus, definiert durch

$$\text{Log}(z) = \ln r + i\varphi \quad (4.11)$$

für $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, holomorph mit Ableitung $\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}$. Auf dieser kleineren Menge also *existiert* eine Stammfunktion. In der Tat ist ja die geschlitzte Ebene sternförmig mit Sternmittelpunkt $1 \in z$ und es gilt

$$\text{Log}(z) = \int_{\gamma_{1z}} \frac{1}{w} dw \quad (4.12)$$

Zum Nachweis kann (wegen der Existenz der Stammfunktion) statt auf der direkten Strecke γ_{1z} auch entlang des rechts skizzierten Weges integriert werden. Das gerade Stück ist $[1, r] \ni t \mapsto t$, das gebogene $[0, \varphi] \ni t \mapsto re^{it}$, und



$$\int_1^r \frac{1}{s} ds + \int_0^\varphi \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \ln r + i\varphi \quad (4.13)$$

Der entscheidende Schritt zum Nachweis der Implikation

komplexe Integrierbarkeit (Existenz lokaler Stammfunktionen)

$$\Rightarrow \text{komplexe Differenzierbarkeit (Holomorphie)} \quad (4.14)$$

ergibt sich aus der Verbindung von (4.6) für konvexe Mengen mit dem Integral (4.9).

Theorem 4.4 (Cauchysche Integralformel). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Angenommen, für $z_0 \in U$ und $R > 0$ ist $\overline{B}_R(z_0) \subset U$. Dann gilt für alle $z \in B_R(z_0)$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (4.15)$$

In Worten: Der Wert einer holomorphen Funktion in einem beliebigen Punkt im Innern einer jeden in ihrem Definitionsbereich enthaltenen abgeschlossenen Kreisscheibe ist gleich dem “komplexen” Mittelwert der mit dem umgekehrten Abstand zu diesem Punkt gewichteten Funktion über die Kreisl Linie.

Dem Beweis schicken wir eine allgemein nützliche topologische Überlegung voraus.

Lemma 4.5 (Lemma von Lebesgue³⁸). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $K \subset U$ kompakt. Dann existiert ein $\lambda > 0$ so, dass für alle $z \in K$ die offene Kreisscheibe $B_\lambda(z)$ ganz in U enthalten ist. Eine solche (nicht eindeutige) Zahl λ nennt man eine Lebesguezahl (für K bezüglich U).*

Beweis. Da U offen ist und $K \subset U$, existiert für jedes $a \in K$ ein $r_a > 0$ so, dass $B_{2r_a}(a) \subset U$. Die $(B_{r_a}(a))_{a \in K}$ bilden eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h. eine endliche Menge $A \subset K$ so, dass $K \subset \bigcup_{a \in A} B_{r_a}(a)$.

Beh.: $\lambda := \min\{r_a, a \in A\}$ ist eine Lebesguezahl.

Bew.: Für alle $z \in K$ existiert ein $a \in A$ so, dass $z \in B_{r_a}(a)$. Dann folgt aus $|w - z| < \lambda$, dass $|w - a| \leq |w - z| + |z - a| < r + r_a \leq 2r_a$, d.h. $w \in B_{2r_a}(a)$, und damit ist $B_\lambda(z) \subset B_{2r_a}(a) \subset U$. $\square$

Beweis von Theorem 4.4. 0. Schritt: Es existiert ein $\tilde{R} > R$ so, dass $\overline{B}_{\tilde{R}}(z_0) \subset U$.

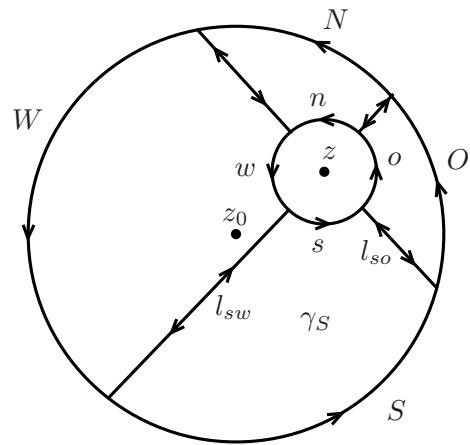
Bew.: Sei $\lambda > 0$ eine Lebesguezahl für $\overline{B}_R(z_0)$ bezüglich U , und $R < \tilde{R} < R + \lambda$. Ist $|w - z_0| \leq \tilde{R}$ und $z := z_0 + \frac{R}{\tilde{R}}(w - z_0)$ so gilt $|z - z_0| \leq R$ und $|w - z| < \lambda$, d.h. $w \in B_\lambda(z)$. Daraus folgt die Behauptung.

1. Schritt: Für $r > 0$ klein genug ist $B_r(z) \subset B_R(z_0)$ und für alle solche r gilt

$$\int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{C_r^+(z)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (4.16)$$

Bew.: Wir zerlegen wie skizziert

$$\begin{aligned} \int_{C_R^+(z_0)} &= \int_O + \int_N + \int_W + \int_S \\ \int_{C_r^+(z)} &= \int_o + \int_n + \int_w + \int_s \end{aligned} \quad (4.17)$$



und addieren und subtrahieren die geraden Stücke in die Nebenhimmelsrichtungen, sodass

$$\int_{C_R^+(z_0)} - \int_{C_r^+(z)} = \int_{\gamma_O} + \int_{\gamma_N} + \int_{\gamma_W} + \int_{\gamma_S} \quad (4.18)$$

wo z.B.³⁹

$$\int_{\gamma_S} = \int_S - \int_{l_{so}} - \int_s + \int_{l_{sw}} \quad (4.19)$$

³⁸Die volle Version des Lebesgueschen Lemmas sagt eigentlich noch etwas mehr, diese hier reicht aber für unsere Zwecke aus.

³⁹Ich muss für gerade Stücke wirklich σ schreiben!

§4. CAUCHY-FORMELN

etc. Nun verläuft jeder der vier Wege in einer (anderen) offenen konvexen Menge $\subset U$, auf der der Integrand

$$w \mapsto \frac{f(w)}{w-z} \quad (4.20)$$

jeweils holomorph ist. Beispiel: $\gamma_S \subset \{w \mid \operatorname{Im}(w) < \operatorname{Im}(z)\} \cap B_{\bar{R}}(z_0)$ etc. Gemäss Lemma 3.6 besitzt der Integrand auf jeder dieser vier konvexen Mengen eine (möglicherweise andere) Stammfunktion, so dass gemäss (4.6) $\int_{\gamma_S} = 0$ etc.. Zusammen folgt (4.16).

2. Schritt: Aus (4.10) folgt, dass für jedes $r > 0$ wie oben

$$f(z) = f(z) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{1}{w-z} dw}_{=1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{f(z)}{w-z} dw \quad (4.21)$$

sodass zusammen mit (4.16) für jedes solches r

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \quad (4.22)$$

Zum Beweis der Behauptung (4.15) reicht es dann aus, dass wir für jedes $\epsilon > 0$ ein $r > 0$ angeben, für das wir zeigen können, dass die rechte Seite von (4.22) kleiner als ϵ ist.

Bew.: Da f in z holomorph ist, ist der Differenzenquotient $w \mapsto \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ per Definition 2.3 stetig in z fortsetzbar, und daher auf der kompakten Menge $\overline{B}_R(z_0)$ beschränkt, sagen wir durch $M > 0$. Sei nun für $\epsilon > 0$ $r > 0$ so klein, dass $Mr < \epsilon$. Dann folgt aus der Standardabschätzung Lemma 3.11 (ii) des Integrals

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} M \cdot \underbrace{l(C_r^+(z))}_{=2\pi r} < \epsilon \quad (4.23)$$

□

Korollar 4.6. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 4.4 gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt \quad (4.24)$$

Folgerungen

Die Integralformel (4.15) ist ein Ausdruck davon, dass die Werte holomorpher Funktionen auch an weit entfernten Punkten stark voneinander abhängig sind. Dabei hängt die rechte Seite von der untersuchten Funktion f nur noch über die Integrationsvariable ab, während die unabhängige Variable z auf sehr einfache Weise als “differenzierbarer Parameter” auftritt. Dies führt zur angekündigten Analytizität und damit Glattheit holomorpher Funktionen.

Theorem 4.7. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ und $R > 0$ so, dass $\overline{B}_R(z_0) \subset U$. Dann gilt für alle $z \in B_R(z_0)$

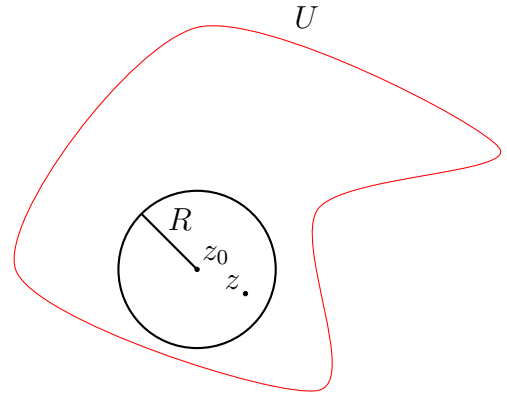
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (4.25)$$

mit den Koeffizienten

$$a_k^{(z_0)} = a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \quad (4.26)$$

Insbesondere ist f auf U analytisch (siehe Def. 2.14) und es gilt $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$ (siehe Korollar 2.15).

Bemerkung. Ein Korrelat der Aussage ist, dass die aus den Koeffizienten (4.26) gebildete Potenzreihe für alle $z \in B_R(z_0)$ konvergiert. Ihr Konvergenzradius ist also mindestens R . Gemäss 0. Schritt des Beweises von Theorem 4.4 existiert auch stets noch eine etwas grössere Kreisscheibe $\overline{B}_{\tilde{R}}(z_0) \subset U$ mit $\tilde{R} > R$, in deren Inneren die Potenzreihe (4.25) immer noch konvergiert.⁴⁰ Der Konvergenzradius der Reihe ist also grösser als der Radius jeder Kreisscheibe um z_0 , die noch ganz in U passt, und im Allgemeinen auch noch grösser als deren Supremum.



Beweis von Theorem 4.7. Für festes $z \in B_R(z_0)$ ist

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} =: \rho < 1 \quad (4.27)$$

konstant für alle $w \in C_R(z_0)$. Dort gilt daher (geometrische Reihe)

$$\left| \frac{1}{w - z} - \sum_{k=0}^n \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} \right| = \left| \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^k} \right| \leq \frac{1}{R} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho} \quad (4.28)$$

⁴⁰Insbesondere sind die Koeffizienten (4.26) unabhängig von R .

§4. CAUCHY-FORMELN

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit (4.15) und der Standardabschätzung des Integrals folgt

$$\begin{aligned}
 & \left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \cdot (z - z_0)^k \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} f(w) \left(\frac{1}{w - z} - \sum_{k=0}^n \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} \right) dw \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max\{|f(w)| \mid w \in C_R(z_0)\} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho} \cdot (2\pi R) \\
 &\leq \max\{|f(w)| \mid w \in C_R(z_0)\} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Wegen $\rho < 1$ konvergiert also die Reihe wie behauptet gegen $f(z)$. $\square$

Korollar 4.8. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

(i) Ist f holomorph, so ist f bereits unendlich oft komplex differenzierbar und für alle $z_0 \in U$, $R > 0$ so, dass $\overline{B}_R(z_0) \subset U$ gilt für alle $z \in B_R(z_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \tag{4.30}$$

(ii) Besitzt f eine komplexe Stammfunktion, so ist f bereits selbst holomorph.

Beweis. (i) Die erste Aussage folgt aus der Verbindung von Theorem 4.7 mit Proposition 2.11 (iii). Unter den Voraussetzungen an z_0, R, z folgt wie im 1. Schritt des Beweises von Theorem 4.4, dass

$$\int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw = \int_{C_r^+(z)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \tag{4.31}$$

für beliebiges $r > 0$ mit $B_r(z) \subset B_R(z_0)$, da der Integrand auf einer Umgebung von $\overline{B}_R(z_0) \setminus \{z\}$ holomorph ist. Letzteres Integral ist aber gemäss Theorem 4.7 (bis auf den Faktor $\frac{n!}{2\pi i}$ genau) der n -te Koeffizient der Potenzreihenentwicklung von f um z . Die Formel für die Ableitung folgt also aus Korollar 2.15.

(ii) Eine Stammfunktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ von f ist als holomorphe Funktion gemäss (i) unendlich oft komplex differenzierbar. Insbesondere ist $f = F'$ holomorph. $\square$

Der intellektuellen Vollständigkeit halber geben wir hier noch einen direkteren Beweis von (4.30), durch “Ableiten unter dem Integralzeichen”, per Induktion nach n . Der Fall $n = 0$ ist gerade Theorem 4.4, für den Schritt von $n-1$ nach n benutzen wir, dass der Integrand $\frac{f(w)}{(w-z)^n}$ gleichmässig in $w \in C_R(z_0)$ nach z differenzierbar ist: $f(w)$ ist als stetige Funktion auf einem Kompaktum eh

beschränkt, für den z -abhängigen Faktor gilt, für $|h| \leq \delta$ mit $\delta > 0$ klein genug,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(w - (z + h))^n} - \frac{1}{(w - z)^n} - \frac{hn}{(w - z)^{n+1}} \\
 &= \frac{(w - z)^{n+1} - (w - z - h)^n(w - z) - hn(w - z - h)^n}{(w - z - h)^n(w - z)^{n+1}} \\
 &= h^2 \cdot \underbrace{\frac{-\binom{n}{2}(w - z)^{n-1} + n^2(w - z)^{n-1} + \dots - (-h)^{n-2}(w - z) - nh(-h)^{n-2}}{(w - z - h)^n(w - z)^{n+1}}}_{=: g_z(h, w)}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

wobei $g_z(h, w)$ als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\overline{B}_\delta(0) \times C_R(z_0)$ beschränkt ist. Insgesamt existiert also eine Konstante M so, dass für alle $|h| < \delta$

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - (z + h))^n} dw - \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^n} dw - h \int_{C_R^+(z_0)} \frac{nf(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \right| \\
 & \leq 2\pi R \cdot M \cdot |h^2| = |h| \cdot 2\pi R M \delta
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Wählt man für gegebenes $\epsilon > 0$ $\delta = \epsilon/(2\pi R M)$, so folgt daraus die Differenzierbarkeit von $f^{(n-1)}$ in z mit der behaupteten Ableitung. Alternativ verifiziert man mit Hilfe der entsprechenden Resultate aus der reellen Analysis Existenz, Stetigkeit und Cauchy-Riemann Gleichungen für die partiellen Ableitungen.

Zur Unterstreichung ihrer Bedeutsamkeit halten wir einige der in den Cauchy-Formeln enthaltenen Implikationen noch gesondert fest.

Korollar 4.9 (Satz von Morera). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig so, dass für alle geschlossenen Wege γ in U $\int_\gamma f(w)dw = 0$. Dann ist f bereits holomorph.*

Beweis. Aus der Hinrichtung von Proposition 4.1 folgt die Existenz einer Stammfunktion auf jeder zusammenhängenden offenen Teilmenge von U , aus Korollar 4.8 (ii) die Holomorphie von f . $\square$

Korollar 4.10 (Potenzreihen sind analytisch). *Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion lässt sich um jeden Punkt ihrer Konvergenzscheibe in eine konvergente Potenzreihe entwickeln.*

Beweis. nun offensichtlich. $\square$

Globale Konsequenzen

Eventuell umstellen: Lokale Abbildungseigenschaften zuerst, dann Beispiele, Liouville und FSA am Schluss? Die Integraldarstellung (4.30) der Taylorkoeffizienten erlaubt darüber hinaus aber noch eine quantitative Fassung des (durchaus intuitiven) Zusammenhangs zwischen den Werten der Ableitung einer analytischen Funktion an einem Punkt und ihrem Wachstum auf “grossen Kreisen”.

Proposition 4.11 (Cauchysche Ungleichungen). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für alle $z_0 \in U$ und $R > 0$ so, dass $\overline{B}_R(z_0) \subset U$, und für alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq M_{f, z_0}(R) \frac{n!}{R^n} \tag{4.34}$$

wobei $M_{f, z_0}(R) := \max\{|f(w)| \mid w \in C_R(z_0)\}$.

§ 4. CAUCHY-FORMELN

Beweis. Wegen der Stetigkeit von f ist $M_{f,z_0}(R) < \infty$. Standardabschätzung von (4.26) liefert wegen $|w - z_0| = R$ für alle $w \in C_R(z_0)$

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{n!}{2\pi} (2\pi R) \frac{M_{f,z_0}(R)}{R^{n+1}}, \quad (4.35)$$

genau die Behauptung. $\square$

Für festgehaltenes R bedeutet (4.34), dass die Ableitungen mit n nicht schneller wachsen können als $n!$, bzw. nach Division durch $n!$, dass das Wachstum der Taylor-Koeffizienten beschränkt ist durch R^{-n} für jedes R kleiner als der Konvergenzradius (was natürlich wieder genau zur Hadamard-Formel (2.25) führt). Für festgehaltenes n erhält man umgekehrt eine untere Schranke an das Wachstum der Funktion mit R .

Definition 4.12. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, heisst *ganze Funktion*. In der Notation von Korollar 2.5 schreiben wir für die Algebra der ganzen Funktionen $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Theorem 4.13 (Satz von Liouville). *Ein beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Aus Theorem 4.7 folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (4.36)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, für jede ganze Funktion f . Ist ausserdem f beschränkt, d.h. existiert ein M so, dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so gilt in der Notation von Proposition 4.11 insbesondere $M_{f,0}(R) \leq M$ für alle $R > 0$, $n \geq 0$, und daher

$$|f^{(n)}(0)| \leq M \cdot \frac{n!}{R^n} \quad (4.37)$$

mit $R \rightarrow \infty$ folgt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n > 0$, d.h. $f(z) = f(0)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Korollar 4.14 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat (mindestens) eine komplexe Nullstelle.*

Beweis. Angenommen, $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ mit $n > 0$ und $a_n \neq 0$ hat *keine* Nullstelle in ganz $\mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $z \mapsto P(z)^{-1}$ wohldefiniert, ganz, und nicht konstant. Setzen wir $M := \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$, $R := \max\{1, \frac{2M}{|a_n|}\}$ so gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$

$$\begin{array}{ccc} |z| > 1 & M \leq \frac{|a_n|}{2} |z| & \\ \downarrow & \searrow & \\ |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| \leq M |z|^{n-1} & \leq \frac{|a_n|}{2} |z|^n & \end{array} \quad (4.38)$$

Daraus folgt für alle solche z

$$|P(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| \geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n \geq \frac{|a_n|}{2} R^n \quad (4.39)$$

$P(z)^{-1}$ ist dadurch ausserhalb der kompakten Menge $\overline{B}_R(0)$ also beschränkt, und innerhalb wegen der Stetigkeit. Damit ist $P(z)^{-1}$ überhaupt beschränkt, was wegen Theorem 4.13 absurd ist. $\nexists$ $\square$

Anwendung...

...zur Berechnung reeller Integrale durch den *Umweg ins Komplexe*.

Beispiel 4.15. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > |b|$. Dann erkennen wir im reellen Integral⁴¹

$$I(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos \varphi} d\varphi \quad (4.40)$$

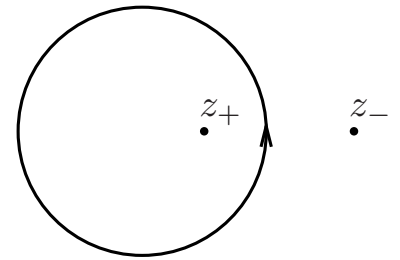
(welches wegen $|\cos \varphi| \leq 1$ für alle φ wohldefiniert ist) die Parametrisierung

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{b}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})} \frac{1}{i} e^{-i\varphi} \frac{d}{d\varphi} e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{i} \int_{C_1^+(0)} \frac{1}{a + \frac{b}{2}(w + w^{-1})} \cdot \frac{1}{w} \cdot dw \quad (4.41)$$

des Integrals über den positiv orientierten Einheitskreis der Funktion

$$z \mapsto f(z) := \frac{1}{\frac{b}{2}z^2 + az + \frac{b}{2}} \quad (4.42)$$

welche ausserhalb der Nullstellen des Nenners auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph ist.



Für $b = 0$ ist dies einfach

$$I(a, 0) = \frac{2\pi}{a} \quad (4.43)$$

Für $b \neq 0$ lösen wir $\frac{b}{2}z^2 + az + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(z - z_+)(z - z_-)$ mit $z_{\pm} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$, und bemerken, dass wegen $z_+z_- = 1$ genau eine Nullstelle in $B_1(0)$ liegt, die andere ausserhalb. (Für $b > 0$ ist dies z_+ , für $b < 0$, z_- .) Dies ergibt mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{2}{b} \frac{1}{z_+ - z_-} \left(\frac{1}{z - z_+} - \frac{1}{z - z_-} \right) \quad (4.44)$$

und den Cauchy-Formeln (4.6) und (4.10)

$$I(a, b) = \frac{1}{i} \frac{1}{b\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}} \int_{C_1^+(0)} \left(\frac{1}{w - z_+} - \frac{1}{w - z_-} \right) dw = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (4.45)$$

(Dies ist wie es sein muss unabhängig vom Vorzeichen von b und geht für $b \rightarrow 0$ noch stetig in (4.43) über.)

Beispiel 4.16. Der Integrand von

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (4.46)$$

⁴¹Interpretation wird nachgereicht.

§4. CAUCHY-FORMELN

wird für $x \rightarrow \infty$ majorisiert durch $2/x^2$ und ist in $x = 0$ wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ stetig, so dass insbesondere $I \in \mathbb{R}$ auch existiert. Wir fassen ihn auf als Realteil der komplexen und auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphen Funktion

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2} \quad (4.47)$$

und schreiben $I = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} I(\epsilon, R)$ mit

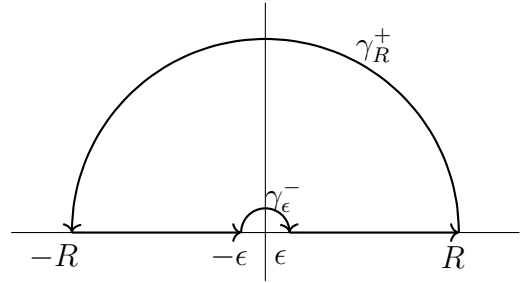
$$I(\epsilon, R) = \int_{\epsilon}^R \operatorname{Re}(f(x)) dx = \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^R (f(x) + f(-x)) dx \quad (4.48)$$

wo wir benutzt haben, dass $\overline{f(x)} = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$2I(\epsilon, R) = \int_{-R}^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{\epsilon}^R f(x) dx \quad (4.49)$$

Dann “schliessen wir den Integrationsweg im Komplexen” durch Hinzufügen der abgebildeten Halbkreise und benutzen den Integralsatz (4.6) im Sterngebiet $\mathbb{C} \setminus \{w \mid \operatorname{Im}(w) \leq 0\}$ um zu folgern, dass

$$2I(\epsilon, R) = - \int_{\gamma_{\epsilon}^{-}} f(w) dw - \int_{\gamma_R^{+}} f(w) dw \quad (4.50)$$



Für alle $w \in \gamma_R^{+}$ gilt $\operatorname{Im}(w) \geq 0$, $|e^{iw}| = e^{-\operatorname{Im}(w)} \leq 1$ und daher $\left| \frac{1 - e^{iw}}{w^2} \right| \leq \frac{2}{R^2}$ so dass

$$\left| \int_{\gamma_R^{+}} f(w) dw \right| \leq \pi R \cdot \frac{2}{R^2} = \frac{2\pi}{R} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty \quad (4.51)$$

Zur Auswertung des Integrals über den kleinen Halbkreis bemerken wir, dass

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(f(z) + \frac{i}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{iz} + iz}{z^2} = \frac{1}{2} \quad (4.52)$$

woraus durch Standardabschätzung folgt, dass

$$\left| \int_{\gamma_{\epsilon}^{-}} \left(f(w) + \frac{i}{w} \right) dw \right| \leq \pi \epsilon \cdot \text{const.} \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0 \quad (4.53)$$

Andererseits ist

$$\int_{\gamma_{\epsilon}^{-}} \frac{i}{w} dw = \int_{-\pi}^0 \frac{i}{\epsilon e^{-it}} (-i) \epsilon e^{-it} dt = \pi \quad (4.54)$$

unabhängig von ϵ . Daraus folgt mit (4.53)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\epsilon}^{-}} f(w) dw = -\pi \quad (4.55)$$

Zusammen ergibt dann (4.50)

$$I = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} I(\epsilon, R) = \frac{1}{2} \left(- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\epsilon}^{-}} f(w) dw - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^{+}} f(w) dw \right) = \frac{\pi}{2} \quad (4.56)$$

§ 5 Identität, Offenheit, Gleichmässigkeit

Zum Abschluss des Kapitels stellen wir einige häufig benutzte Aussagen zum lokalen Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen und zur Konvergenz holomorpher Funktionenfolgen zusammen, die entweder direkt oder über die Analytizität aus der Cauchy Integralformel folgen.

Proposition 5.1. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $f \in \mathcal{O}(D)$.*

(i) *Besitzt die Nullstellenmenge $N_f = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ einen Häufungspunkt in D , so ist $f \equiv 0 \in \mathcal{O}(D)$.*

(ii) *Die Nullstellenmenge ist (höchstens) abzählbar.*

(iii) *Ist $g \in \mathcal{O}(D)$ eine weitere holomorphe Funktion auf D und hat die Koinzidenzmenge $S = \{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in D , so ist $f \equiv g$.*

Beweis. Gemäss Theorem 4.7 sind holomorphe Funktionen analytisch. Die Aussagen (i) und (iii) sind damit einfache Wiederholungen von Proposition 2.16 und Korollar 2.19. Die Abzählbarkeit folgt durch Ausschöpfung von D mit kompakten Mengen (siehe ??). $\square$

Proposition 5.2. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(D)$ nicht konstant. Dann gilt*

(i) *f besitzt in D kein lokales Betragsmaximum.*

(ii) *Besitzt f in $z_0 \in D$ ein lokales Betragsminimum, so gilt $f(z_0) = 0$.*

(iii) *Ist $K \subset D$ kompakt und nicht-leer, so gilt⁴²*

$$(\alpha) \quad M_f(K) := \max\{|f(z)| \mid z \in K\} = \max\{|f(z)| \mid z \in \partial K\}$$

$$(\beta) \quad \text{Für alle } z \in \overset{\circ}{K} := K \setminus \partial K \text{ ist } |f(z)| < M_f(K)$$

Die Aussagen (i) und (iii) verkörpern das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen: “ f nimmt ihr Maximum auf dem Rand an, und nur dort.”

Beweis. Auch dies ist im Wesentlichen eine Wiederholung von Proposition 2.20 (bzw. Aufgabe H3.3). Da f nicht konstant ist, besteht nach Proposition 5.1 für jedes $z_0 \in D$ die Potenzreihenentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ von f um z_0 nicht nur aus $a_0 = f(z_0)$. Sei a_n der erste nicht-verschwindende Koeffizient mit $n > 0$. Dann gilt für alle z in einer geeigneten Kreisscheibe

$$|f(z)| \geq |a_0 + a_n(z - z_0)^n| - \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right| \quad (5.1)$$

$$|f(z)| \leq |a_0 + a_n(z - z_0)^n| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right|, \quad (5.2)$$

sowie nach Vergleich mit der geometrischen Reihe

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right| \leq C \cdot |z - z_0|^{n+1} \quad (5.3)$$

⁴²Der *topologische Rand* einer Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ ist die Menge $\partial A = \{z \in \mathbb{C} \mid \forall \delta > 0 \text{ ist } B_\delta(z) \cap A \neq \emptyset \text{ und } B_\delta(z) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset\}$

§ 5. IDENTITÄT, OFFENHEIT, GLEICHMÄSSIGKEIT

für ein geeignetes $C > 0$. Aus der Formel von deMoivre (1.14) folgt⁴³ die Existenz von Argumenten $\varphi_{\pm} \in \mathbb{R}$ so, dass für $z_{\pm} = z_0 + \rho e^{i\varphi_{\pm}}$,

$$|a_0 + a_n(z_+ - z_0)^n| = |a_0| + |a_n|\rho^n \quad \text{für alle } \rho \geq 0 \quad (5.4)$$

$$|a_0 + a_n(z_- - z_0)^n| = |a_0| - |a_n|\rho^n \quad \text{falls } a_0 \neq 0 \text{ und } \rho \geq 0 \text{ klein genug} \quad (5.5)$$

Einsetzen in (5.1) ergibt

$$|f(z_+)| \geq |a_0| + |a_n|\rho^n - C\rho^{n+1} \quad (5.6)$$

$$|f(z_-)| \leq |a_0| - |a_n|\rho^n + C\rho^{n+1} \quad (5.7)$$

Für $0 < \rho < \frac{|a_n|}{C}$ folgen daraus (i) und (ii). Zum Beweis von (iii) genügt der Hinweis, dass $z \mapsto |f(z)|$ als stetige reellwertige Funktion auf der kompakten Menge K zwar ein Maximum annehmen muss, wegen (i) jedoch in keinem Punkt im Inneren von K ein lokales Maximum, geschweige denn ein globales Maximum besitzt. $\square$

Die folgende Erkenntnis allerdings hatten wir in § 2 noch nicht geteilt und gibt eine schöne Anwendung des Minimaxprinzips. *Könnte später alles mal zusammen gefasst werden, nisi repetitio mater studiorum.*

Proposition 5.3. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ nicht konstant und $z_0 \in D$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass $B_{\epsilon}(f(z_0)) \subset f(D)$, d.h. das Bild von D unter f ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei wieder $f(z) = f(z_0) + a_n(z - z_0)^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ die Potenzreihenentwicklung von f um z_0 . Dann folgt wieder durch Abschätzung der Restreihe die Existenz von $r > 0$, $c > 0$ so, dass

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| a_n(z - z_0)^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right| \geq c \cdot r^n \quad (5.8)$$

für alle z mit $|z - z_0| \leq r$. Setzen wir $\epsilon = \frac{cr^n}{2}$, so gilt für alle $w \in B_{\epsilon}(f(z_0))$ einerseits

$$|f(z_0) - w| < \frac{cr^n}{2} \quad (5.9)$$

und andererseits

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - f(z_0)| - |f(z_0) - w| > \frac{cr^n}{2} \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z - z_0| = r \quad (5.10)$$

Daraus folgt, dass das Betragsminimum der holomorphen Funktion $z \mapsto f(z) - w$ auf dem Kompaktum $\overline{B}_r(z_0)$ nicht auf dem Rand angenommen wird, sondern im Innern. Wegen Proposition 5.2 (ii) ist dies nur in einer Nullstelle möglich, d.h. es existiert (mindestens) ein $z_* \in D$ mit $f(z_*) = w$. $\square$

Korollar 5.4 (Satz von der Gebietstreue). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(D)$ nicht konstant. Dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.*

⁴³für $a_0 = 0$ trivialerweise, für $a_0 \neq 0$ durch Lösen von $e^{in\varphi_{\pm}} = \pm \frac{a_0}{a_n} \frac{|a_n|}{|a_0|}$

Beweis. Als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge ist $f(D)$ wieder zusammenhängend. Die Offenheit ist genau die Folgerung von Proposition 5.3. $\square$

Theorem 5.5 (Satz von Weierstrass). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(U)$ eine lokal gleichmässig konvergente Folge holomorpher Funktionen. Dann ist die (punktweise gebildete) Grenzfunktion $z \mapsto f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ wieder holomorph auf U . Die Folge (f'_n) konvergiert lokal gleichmässig gegen f' .*

Beweis. Die lokal gleichmässige Konvergenz von (f_n) bedeutet, dass es für alle $z_0 \in U$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass für alle $\epsilon > 0$ ein N existiert so, dass

$$|f(z) - f_n(z)| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N \text{ und alle } z \in B_\delta(z_0) \quad (5.11)$$

Sie ist äquivalent zur gleichmässigen Konvergenz auf Kompakta und impliziert insbesondere die Stetigkeit der Grenzfunktion.⁴⁴ Zum Nachweis der Holomorphie genügt es daher wegen Korollar 4.9 zu zeigen, dass $\int_\gamma f(w)dw = 0$ für alle geschlossenen Wege γ in jeder offenen Kreisscheibe $B_R(z_0) \subset U$. Dies folgt aber aus der entsprechenden Aussage für jedes f_n , der gleichmässigen Konvergenz von (f_n) auf dem kompakten Bild von γ , und der Standardabschätzung des Integrals.

Zum Nachweis der lokal gleichmässigen Konvergenz von (f'_n) benutzen wir die Cauchy-Formel in der Form (4.30). Ist $\bar{B}_R(z_0) \subset U$, so gilt für alle $z \in B_{R/2}(z_0)$, $|w - z| \geq R/2$ für alle $w \in C_R(z_0)$. Daher ist die Konvergenz $f_n(w)/(w - z)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(w)/(w - z)^2$ gleichmässig in $w \in C_R(z_0)$ und $z \in B_{R/2}(z_0)$. Es folgt

$$\int_{C_R^+(z_0)} \frac{f_n(w)}{(w - z)^2} dw \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{C_R^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw \quad (5.12)$$

gleichmässig in $z \in B_{R/2}(z_0)$, und daraus die Behauptung. $\square$

Korollar 5.6. *Eine normal konvergente Reihe $f = \sum f_n$ von holomorphen Funktionen $f_n \in \mathcal{O}(U)$ ist selbst wieder holomorph und die Reihe $\sum f'_n$ konvergiert normal gegen f' .*

Beweis. Die normale Konvergenz bedeutet, dass für alle $z_0 \in U$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass die aus den sup-Normen $M_n := \sup\{|f_n(z)| \mid z \in B_\delta(z_0)\}$ gebildete Reihe $\sum M_n$ konvergiert. Sie impliziert lokal gleichmässige absolute Konvergenz⁴⁵ und damit auch gleichmässige absolute Konvergenz auf Kompakta. Die Holomorphie folgt somit aus Theorem 5.5. Die normale Konvergenz der Ableitungen folgt aus

$$\left| \int_{C_\delta^+(z_0)} \frac{f_n(w)}{(w - z)^2} dw \right| \leq 2\pi\delta \cdot \frac{4}{\delta^2} M_n \quad (5.13)$$

für alle $z \in B_{\delta/2}(z_0)$, der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$ entsprechend. $\square$

⁴⁴Für $z_0 \in U$ sei $\delta > 0$, und für $\epsilon > 0$ dann N so wie in (5.11). Dann existiert wegen der Stetigkeit von f_N ein $\tilde{\delta} > 0$ mit $\tilde{\delta} < \delta$ so, dass $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \epsilon$ für alle $z \in B_{\tilde{\delta}}(z_0)$. Dann gilt für alle solche z :

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < 3\epsilon.$$

⁴⁵d.h., die in $z \in B_\delta(z_0)$ gleichmässige Konvergenz von $\sum |f_n(z)|$. Sie ist aber nicht völlig äquivalent dazu, da für verschiedene n die Suprema an verschiedenen Stellen entstehen können.

§ 5. IDENTITÄT, OFFENHEIT, GLEICHMÄSSIGKEIT

Man überlege sich durch geeignete Gegenbeispiele, dass die zu Theorem 4.13, Proposition 5.1, Proposition 5.2, Proposition 5.3 analogen Aussagen im Reellen *nicht* gelten, Theorem 5.5 nur wenn man schon *vorab weiss*, dass die Folge der Ableitungen gleichmässig konvergiert. Dies hatten wir etwa im Beweis von Proposition 2.11 ausgenutzt. Mit den gleichen Ideen können wir auch die “Ableitung unter dem Integralzeichen”, die wir auf S. 39 erläutert hatten, etwas bootstrappen.

Korollar 5.7. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $g : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion so dass für alle $s \in [0, 1]$ die Einschränkung $g|_{U \times \{s\}} : z \mapsto g(z, s)$ holomorph auf U ist. Dann ist die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$,*

$$f(z) = \int_0^1 g(z, s) ds \quad (5.14)$$

holomorph auf U . Die partielle Ableitung $\partial_z g(z, s)$ ist stetig auf $U \times [0, 1]$ und es gilt

$$f'(z) = \int_0^1 \partial_z g(z, s) ds \quad (5.15)$$

Beweis. g ist als stetige Funktion auf einer lokal kompakten Menge lokal gleichmässig stetig. Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]$ existiert daher für alle $z_0 \in U$ ein $\delta > 0$ so, dass g auf $B_\delta(z_0) \times [0, 1]$ gleichmässig stetig ist. Dann konvergiert die Folge der Riemannschen Summen

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(z, \frac{k}{n}\right) \quad (5.16)$$

gleichmässig in $z \in B_\delta(z_0)$ gegen $f(z)$. Die Holomorphie folgt also aus Theorem 5.5. Die Aussagen zur Ableitung (insbesondere die Stetigkeit von $\partial_z g$!) folgen wieder mit Hilfe der Cauchy-Formeln. $\square$

Übungsaufgabe. (i) Die Folge (g_n) der auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktionen $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ konvergiert lokal (bzw. sogar global auf ganz $\mathbb{R}$) gleichmässig gegen die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$.

(ii) Die Folge der Ableitungen konvergiert aber (in $x = 0$) nicht lokal gleichmässig und die Grenzfunktion ist dort auch nicht differenzierbar.

(iii) Es möchte scheinen, dass wir die Funktionen g_n holomorph in die komplexe Ebene fortsetzen können, ohne die gleichmässige Konvergenz stark zu gefährden. Dennoch kann Theorem 5.5 nicht anwendbar sein, sonst wäre die Einschränkung der mutmasslichen holomorphen Grenzfunktion auf $\mathbb{R}$ doch differenzierbar. Was also geht schief?

KAPITEL 2

MEROMORPHE FUNKTIONEN

Wir fassen den aktuellen Stand bei der Beantwortung der auf Seite 23 aufgeworfenen Frage zusammen...

1. Eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer beliebigen offenen Menge U besitzt dann und nur dann eine Stammfunktion, wenn $\int_{\gamma} f(w)dw = 0$ für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$. Ist U zusammenhängend, so ist f bis auf eine additive Konstante eindeutig.

2. “Lokal”, d.h. auf kleinen Kreisscheiben bzw. allgemeiner auf konvexen oder sternförmigen Gebieten besitzt eine stetige Funktion dann und nur dann eine Stammfunktion wenn sie selbst bereits holomorph ist.

...und erinnern an zwei hierfür wesentliche Einsichten:

I. Das Integral einer holomorphen Funktion ist invariant unter lokalen Abänderungen (d.h., unter Umwegen innerhalb einer konvexen Menge) des Integrationsweges (*Hierzu ein Bild?!).*

II. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $R > 0$ gilt

$$\int_{C_R^+(0)} w^n dw = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \quad (5.1)$$

Das Ergebnis 5.1 folgt alternativ zu einer direkten Rechnung auch

(α) aus der Tatsache, dass für alle $n \neq -1$ die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $z \mapsto z^n$ die Stammfunktion $\frac{1}{n+1} z^{n+1}$ besitzt, der Hauptzweig des komplexen Logarithmus 4.3 aber beim Überschreiten der negativen reellen Achse um $2\pi i$ springt.

(β) nicht ganz formal aus der Beobachtung, dass das Integral (5.1) wegen I. (siehe Beweis von 4.4) einerseits unabhängig von R ist, der Integrand aber andererseits unter der Substitution $w = \rho \tilde{w}$ mit einem Faktor ρ^{n+1} transformiert, das Ergebnis also nur für $n = -1$ von null verschieden sein kann.

Insbesondere lässt sich die Cauchy-Formel (4.26) für eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion $f = \sum a_n z^n$ als direkte Konsequenz von (5.1) auffassen:

$$\begin{aligned} \int_{C_R^+(0)} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw &= \int_{C_R^+(0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{n-k-1} dw = \int_{C_R^+(0)} \sum_{n=-k-1}^{\infty} a_{n+k+1} w^n dw \\ &= \underbrace{\sum_{n=-k-1}^{-2} a_{n+k+1} \int_{C_R^+(0)} w^n dw}_{=0} + \int_{C_R^+(0)} \frac{a_k}{w} dw + \underbrace{\int_{C_R^+(0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k+1} w^n dw}_{=0 \text{ s. (??)}} \\ &= 2\pi i \cdot a_k \end{aligned} \quad (5.2)$$

da der Rest der Potenzreihe eine holomorphe Funktion darstellt (und wir daher noch nicht einmal die gleichmässige Konvergenz anrufen müssen, um das Vertauschen von Integration und unendlicher Summe zu rechtfertigen).

Diese Überlegungen zeigen jedenfalls, dass das Kurvenintegral auch für Funktionen interessant sein kann, die nicht überall stetig (fortsetzbar) sind. Dies ist eine wesentliche Motivation für die Untersuchung von *holomorphen Funktionen mit isolierten Singularitäten* im § 7.

Für ein genaueres Verständnis der Definitionsbereichs-Problematik (bzw. der Aussage I) müssen wir aber zunächst unser topologisches Arsenal etwas erweitern. Dies führt im nächsten § auf den einfachen Zusammenhang als hinreichendes Kriterium, dessen Notwendigkeit dann (wieder mit analytischen Methoden) in § 10 gezeigt wird.

§ 6 Einfacher Zusammenhang, Rektifizierbarkeit, Windungszahl

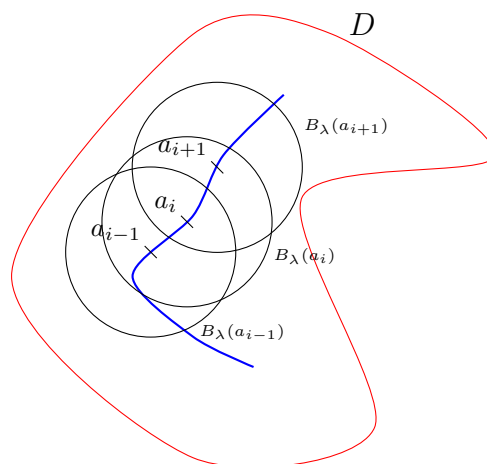
Genau wie der einzige lokale Hinderungsgrund für die komplexe Differenzierbarkeit die offensichtliche komplexe Konjugation ist, so enthält die Rechnung (4.2) bereits den Schlüssel für eine (intuitive, aber letztlich korrekte) Antwort auf die Frage nach der Existenz von globalen Stammfunktionen: Auf einer offenen Menge U besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion, wenn man Punkte ausserhalb von U nicht durch Wege umschliessen kann, die vollständig innerhalb von U verlaufen. Diese Idee lässt sich auf verschiedene Weisen präzise fassen. Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung des Kurvenintegrals 3.10 auf beliebige stetige Wege, wenn auch nur für *holomorphe Funktionen*.

Lemma 6.1. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ ein Weg in D (ohne stückweise stetige Differenzierbarkeitsvoraussetzung!) von a nach b .*

(i) *Es existiert ein $\lambda > 0$ und eine Zerlegung $\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \beta$ so, dass $B_\lambda(\gamma(\alpha_i)) \subset D$ für alle $i = 0, \dots, n$ sowie für alle $i = 1, \dots, n$*

$$\gamma([\alpha_{i-1}, \alpha_i]) \subset B_\lambda(a_{i-1}) \cap B_\lambda(a_i) \quad (6.1)$$

wo $a_i := \gamma(\alpha_i)$, so dass insbesondere die Strecke $\sigma_i := \{a_{i-1} + t(a_i - a_{i-1}) \mid t \in [0, 1]\} \subset D$ von a_{i-1} nach a_i ganz in D enthalten ist.



(ii) *Für jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ ist*

$$\int_\gamma f(w)dw := \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} f(w)dw \quad (6.2)$$

unabhängig von der Wahl von λ und der Zerlegung, wo auf der rechten Seite im Sinne von Proposition 3.3 über die gerade Strecke σ_i integriert wird.

(iii) Ist γ stückweise stetig differenzierbar, so stimmt (6.2) mit dem Integral aus Definition 3.10 überein.

Beweis. (i) Die Spur $\gamma([\alpha, \beta])$ von γ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge wieder kompakt. Gemäss Lemma 4.5 existiert dann eine Lebesguezahl $\lambda > 0$, so dass also $B_\lambda(\gamma(t)) \subset D$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Da γ ausserdem gleichmässig stetig ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \lambda$ falls $|t - s| \leq \frac{\beta - \alpha}{n}$. Wir setzen für $i = 0, \dots, n$

$$\alpha_i = \alpha_0 + \frac{i}{n}(\beta - \alpha), \quad (6.3)$$

und $a_i = \gamma(\alpha_i)$. Dann gilt natürlich $B_\lambda(a_i) \subset D$ sowie für alle $t \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$

$$|\gamma(t) - \gamma(a_{i-1})| < \lambda \text{ und } |\gamma(t) - \gamma(a_i)| < \lambda \quad (6.4)$$

so dass

$$\gamma(t) \in B_\lambda(a_{i-1}) \cap B_\lambda(a_i) \quad (6.5)$$

wie gefordert. Dass $\sigma_i \subset D$ folgt aus der Konvexität von $B_\lambda(a_{i-1}) \cap B_\lambda(a_i)$.

(ii) In die Definition (6.2) geht zunächst nur die Existenz von λ ein, und zwar um sicher zu stellen, dass $\sigma_i \subset D$ für alle i . Es genügt dann zu zeigen, dass der Wert der Summe in (6.2) der gleiche ist wie für eine beliebige Verfeinerung $\{\beta_j\} \supset \{\alpha_i\}$ einer gegebenen Zerlegung (sc. bei fest gehaltenem λ). Dann nämlich können wir zwei verschiedene Zerlegungen über ihre gemeinsame Verfeinerung (Vereinigung der Zerlegungspunkte) vergleichen. Für eine Zerlegung $\beta_0 = \alpha_{i-1} < \beta_1 < \dots < \beta_m = \alpha_i$ eines Teilintervalls $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ bildet (τ_j) mit $\tau_j = \{b_{j-1} + t(b_j - b_{j-1}) \mid t \in [0, 1]\}$ einen Polygonzug von a_{i-1} nach a_i , der komplett in der konvexen Menge $B_\lambda(a_{i-1}) \cap B_\lambda(a_i)$ verläuft, wo f gemäss Proposition 3.5 und Lemma 3.6 eine Stammfunktion besitzt. Es gilt daher

$$\int_{\sigma_i} f(w)dw = \sum_j \int_{\tau_j} f(w)dw \quad (6.6)$$

(siehe Korollar 3.7). Durch Summe über i folgt daraus die Aussage für eine beliebige Verfeinerung des gesamten Parameterintervalls.

(iii) folgt ebenfalls aus der Existenz einer Stammfunktion auf den konvexen Mengen $B_\lambda(a_{i-1}) \cap B_\lambda(a_i)$, so dass nämlich

$$\int_{\sigma_i} f(w)dw = \int_{\gamma|_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]}} f(w)dw \quad (6.7)$$

□

Korollar 6.2. Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ stetig und geschlossen und besitzt $f \in \mathcal{O}(D)$ eine komplexe Stammfunktion, so gilt $\int_\gamma f(w)dw = 0$.

Beweis. In jedem Fall ist $\int_\gamma f(w)dw$ gleich einem Integral über einen geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg in D . Die Aussage folgt daher sofort aus Proposition 4.1. □

Es lohnt sich festzuhalten, dass das Integral (6.2) sich im Allgemeinen *nicht* für beliebige stetige Funktionen durch einen eigenständig Grenzprozess definieren lässt, in dem etwa die Feinheit der Zerlegung gegen 0 geht. Die stückweise stetige Differenzierbarkeit ist zwar nicht nötig, es braucht aber eine weitere Voraussetzung, die hier kurz anklingen soll.

Definition 6.3. Ein Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ heisst *rektifizierbar*, falls eine Zahl L existiert so, dass für alle Zerlegungen $t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_n = \beta$ des Parameterintervalls⁴⁶

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq L \quad (6.8)$$

Die kleinste solche Zahl, das heisst das Supremum der Menge

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \mid (t_k) \text{ ist Zerlegung von } [\alpha, \beta] \right\} \quad (6.9)$$

heisst die *Länge des Wegs*. Ist $\tau : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \rightarrow [\alpha, \beta]$ mit $\tau(\tilde{\alpha}) = \alpha$, $\tau(\tilde{\beta}) = \beta$ stetig und von *beschränkter Variation*, d.h. ist

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |\tau(\tilde{t}_{k+1}) - \tau(\tilde{t}_k)| \mid (\tilde{t}_k) \text{ ist Zerlegung von } [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \right\} \quad (6.10)$$

beschränkt, so ist die Reparametrisierung $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ ebenfalls rektifizierbar.

Proposition 6.4. Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ ein rektifizierbarer Weg, und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann existiert eine Zahl $I(f, \gamma) \in \mathbb{C}$ so, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass für alle Zerlegungen $t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_n = \beta$ des Parameterintervalls der Feinheit $\max\{t_{k+1} - t_k \mid k = 0, \dots, n-1\} < \delta$ und jede Wahl von Stützstellen $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$ gilt, dass

$$\left| I(f, \gamma) - \sum_{k=0}^{n-1} \overbrace{f(\gamma(t_k^*))}^{\text{Riemannsche Summe}} (\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)) \right| < \epsilon \quad (6.11)$$

Stückweise stetig differenzierbare Wege sind rektifizierbar, und für solche stimmt $I(f, \gamma)$ mit Def. 3.10 überein. Für holomorphe Funktionen ist $I(f, \gamma)$ gleich (6.2). Allgemein ist $I(f, \gamma)$ linear in f und erfüllt eine Standardabschätzung bezüglich (6.9). Es ist ausserdem invariant unter Reparametrisierungen von beschränkter Variation und ungerade unter Orientierungswechsel.⁴⁷

Beweis. Die Idee ist ähnlich zur “majorisierten Konvergenz” aus der Reihen- und Integrationstheorie. Für die technische Umsetzung verweisen wir z.B. auf John B.

⁴⁶Wir schreiben die Zerlegungen hier als (t_k) da wir planen, sie beliebig fein zu machen.

⁴⁷Das Integral (6.2) erfüllt in der Form keine Standardabschätzung. Es ist aber auch ungerade unter Orientierungswechsel und reparametrisierungsinvariant (was allerdings etwas unbequem zu zeigen ist).

Conway, Functions of One Complex Variable I, 2nd edition, Springer (1978) und vergleichbare Literatur des letzten Jahrhunderts.⁴⁸ In Verbindung mit masstheoretischen Untersuchungen des komplexen Kurvenintegrals heisst die Bildung $I(f, \gamma)$ auch “Riemann-Stieltjes Integral von f bezüglich γ über $[\alpha, \beta]$ ” und wird dann üblicherweise als

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) d\gamma(t) \quad (6.12)$$

notiert. Wir schrieben weiter $\int_{\gamma} f(w) dw$, wenn wir das bräuchten, und geben stattdessen ein paar minimal non-working examples. $\square$

Beispiele. Der Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t + i(-1)^k((2k+1)t - 2) & \text{für } \frac{1}{k+1} \leq t \leq \frac{1}{k} \end{cases} \quad (6.13)$$

(der unendliche Polygonzug durch die Punkte $a_k = \gamma(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k} + i(-1)^k \frac{1}{k}$) ist wegen

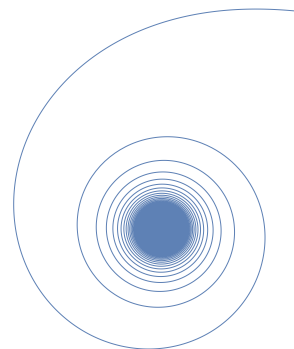
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma(\frac{1}{k}) - \gamma(\frac{1}{k+1})| &= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{k^2} + \frac{2}{(k+1)^2}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k+1} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6.14)$$



nicht rektifizierbar. Eine glattere Version davon ist (vergleiche auch Beispiel 2.21) der “Spiralweg” $\sigma(0) = 0$, $\sigma(t) = \sqrt{t}e^{i/t}$ für $t \in (0, 1]$. Wegen

$$\dot{\sigma}(t) = e^{i/t} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{i}{t^{3/2}} \right) \quad (6.15)$$

gilt $|\dot{\sigma}(t)| \geq t^{-3/2}$ für alle t , was bei $t = 0$ nicht integrierbar ist. Daraus folgt, dass die Länge von interpolierenden Polygonzügen nicht nach oben beschränkt ist, da alle Summanden positiv sind. σ ist also nicht rektifizierbar. Aus dem gleichen Grund sind auch die Riemannschen Summen zur stetigen Funktion $z \mapsto \bar{z}$ entlang σ nicht beschränkt, da



$$\int_0^1 \bar{\sigma}(t) \dot{\sigma}(t) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{t} \right) dt \quad (6.16)$$

ebenso nicht konvergiert. Für eine holomorphe Funktion⁴⁹ wie etwa $z \mapsto z$ ist die Situation weniger übersichtlich. Wegen der Existenz einer komplexen Stammfunktion

⁴⁸Genauer gesagt habe ich keine Referenz für nicht monotone Reparametrisierungen gefunden, die mir aber wichtig scheint. Offenbar ist jedenfalls die Rektifizierbarkeit äquivalent dazu, dass Real- und Imaginärteil von γ von beschränkter Variation sind.

⁴⁹Siehe hierzu What’s New, 246A, Notes 2: complex integration, Exercise 17

ist zwar (trivialerweise!)

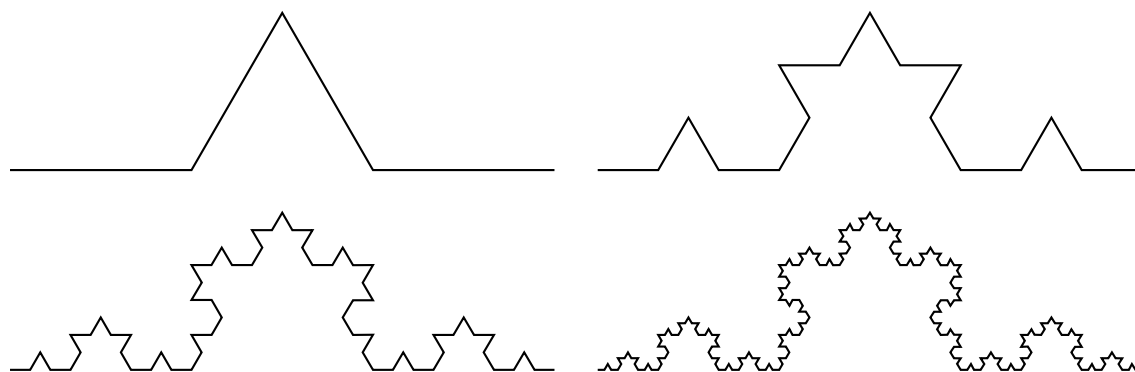
$$\int \sigma(t) \dot{\sigma}(t) dt = \int e^{2i/t} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{t} \right) dt = \frac{1}{2} t e^{2i/t} = \frac{1}{2} \sigma(t)^2 \quad (6.17)$$

mit einem völlig sinnvollen Grenzwert für $t \rightarrow 0$. Dennoch konvergieren beliebige Folgen von Riemmanschen Summen hier im Allgemeinen *nicht*. Könnte man zwar für die äquidistante Zerlegung $(\frac{k}{n})_{k=0, \dots, n}$ Stützstellen $t_k^* \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ so wählen, dass $\sigma(t_k^*) = \frac{1}{2}(\sigma(\frac{k}{n}) + \sigma(\frac{k+1}{n}))$ so wäre wieder trivialerweise

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (\sigma(\frac{k}{n}) + \sigma(\frac{k+1}{n})) (\sigma(\frac{k+1}{n}) - \sigma(\frac{k}{n})) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (\sigma(\frac{k+1}{n})^2 - \sigma(\frac{k}{n})^2) = \frac{1}{2} e^{2i} \quad (6.18)$$

Aber ganz abgesehen davon, dass solche Stützstellen nicht existieren, führt die “grosse Beschleunigung” des Wegs in der Nähe von $t = 0$ dazu, dass die Bilder der Zerlegungsstellen so chaotisch um den Ursprung herumspringen, dass die Riemmanschen Summen eben doch nicht konvergieren.⁵⁰

Ein weiteres beliebtes Beispiel für eine nicht rektifizierbare Kurve ist die sogenannte “Kochsche Schneeflocke” die entsteht, wenn man vom Intervall $[0, 1]$ startend iterativ das mittlere Drittel der geraden Strecken durch die komplementären Seiten eines gleichseitigen Dreiecks darüber ersetzt. Zur Konstruktion einer expliziten Parametrisierung könnte man z.B. ausnutzen, dass das Bild von Punkten $t \in [0, 1]$ mit einer endlichen quaternären Entwicklung nach endlich vielen Schritten vollständig festliegt. Die Nichtrektifizierbarkeit folgt daraus, dass die Länge des Polygonzugs bei jedem Schritt um einen Faktor $4/3$ wächst. Die Riemmanschen Summen zur Funktion $z \mapsto z$ scheinen hier aber dennoch für beliebige Stützstellen zu konvergieren.



Wir gehen nun an die Umsetzung der Idee, die Existenz von Stammfunktionen über die Deformationsinvarianz des Kurvenintegrals zu charakterisieren.

Definition 6.5. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(i) Zwei Wege $\gamma_{1,2} : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ mit gleichen Endpunkten $a := \gamma_1(\alpha) = \gamma_2(\alpha)$ und $b := \gamma_1(\beta) = \gamma_2(\beta)$ heissen *homotop (zueinander) in D* , falls eine stetige Abbildung

$$H : [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow D \quad (t, s) \mapsto H(t, s) \quad (6.19)$$

existiert mit

⁵⁰Man könnte natürlich versuchen an Verallgemeinerungen des Darboux-Riemann-Integrals zu appellieren. Das Lebesgue-Integral wird mit solchen Singularitäten zwar tatsächlich nicht fertig, das Henstock-Kurzweil-Integral sollte es aber tun.

(α) $H(t, 0) = \gamma_1(t)$ und $H(t, 1) = \gamma_2(t)$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$

(β) $H(\alpha, s) = a$ und $H(\beta, s) = b$ für alle $s \in [0, 1]$

Eine solche Abbildung heisst *Homotopie von γ_1 nach γ_2* (relativ zu den Endpunkten) in D .

(ii) Ein geschlossener Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ heisst *nullhomotop*, falls γ homotop ist zum konstanten Weg $\gamma_0 : [\alpha, \beta]$, $\gamma_0(t) = \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.

In dieser Definition ist für jedes s die Einschränkung $\gamma_s := H|_{[\alpha, \beta] \times \{s\}}$ auf das erste Argument ein Weg von a nach b in D , d.h. $s \mapsto \gamma_s$ kann als “stetige Parameterisierung” einer “Familie stetiger Wege” aufgefasst werden, die zwischen γ_1 und γ_2 interpoliert. Der wesentliche Nutzen der Definition (6.2) des Integrals *holomorpher Funktionen über beliebige Wege* ist, dass wir uns dabei nicht um die stetige Differenzierbarkeit der γ_s kümmern müssen.

Man überlegt sich unschwer, dass ein geschlossener Weg genau dann null-homotop ist, wenn jede seiner “Parameterrotationen”, d.h. die Verkettung $\gamma|_{[\delta, \beta]} \star \gamma|_{[\alpha, \delta]}$ für beliebige $\delta \in [\alpha, \beta]$ null-homotop ist (siehe Definition 3.14). Etwas allgemeiner kann man (innerhalb eines festen Gebiets) jeden null-homotopen Weg in jeden beliebigen konstanten Weg homotopieren.

Wie schon bei der Präpositionenwahl berücksichtigt ist die Relation “ γ_1 ist homotop zu γ_2 ” eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heissen *Homotopieklassen*. Die Menge der Homotopieklassen geschlossener Wege mit festem und ausgezeichnetem Startpunkt, ausgerüstet mit der Verkettung als Gruppenoperation, bildet die *Fundamentalgruppe von D* , wie in den Übungen skizziert wird.

Theorem 6.6 (Cauchyscher Integralsatz). *Sind $\gamma_{1,2} : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ zwei homotope Wege mit gleichen Endpunkten im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, so gilt für alle $f \in \mathcal{O}(D)$*

$$\int_{\gamma_1} f(w)dw = \int_{\gamma_2} f(w)dw \quad (6.20)$$

Beweis. Wir zeigen etwas stärker: Ist $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ stetig und $f \in \mathcal{O}(D)$ so gilt

$$\int_{\partial Q} f(w)dw = 0 \quad (6.21)$$

wobei ∂Q die Einschränkung von H auf den positiv durchlaufenen Rand des Quadrats $[0, 1] \times [0, 1]$ bezeichnet, in Formel ist dies die Verkettung von Wegen

$$\partial Q = (H|_{[0,1] \times \{0\}}) \star (H|_{\{1\} \times [0,1]}) \star (\bar{H}|_{[0,1] \times \{1\}}) \star (\bar{H}|_{\{0\} \times [0,1]}) \quad (6.22)$$

Bew.: $Q := H([0, 1] \times [0, 1]) \subset D$ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt. Daher existiert nach Lemma 4.5 eine Lebesgueszahl λ so, dass $B_\lambda(z) \subset D$ für alle $z \in Q$. H ist als stetige Abbildung auf einer kompakten Menge gleichmässig stetig. Daher existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k, l = 0, \dots, n-1$ die (Bilder der) Elemente der Quadratisierung $Q = \cup_{k,l=0}^{n-1} Q_{k,l}$

$$Q_{k,l} := H\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}\right]\right) \subset B_\lambda\left(H\left(\frac{2k+1}{2n}, \frac{2l+1}{2n}\right)\right) \subset D \quad (6.23)$$

in den Kreisscheiben vom Radius λ um die Bilder deren Mittelpunkte enthalten sind. Es gilt

$$\int_{\partial Q_{k,l}} f(w)dw = 0 \quad \forall k, l \quad (6.24)$$

wegen Korollar 6.2, da $B_\lambda\left(H\left(\frac{2k+1}{2n}, \frac{2l+1}{2n}\right)\right)$ konvex ist, und daher

$$\int_{\partial Q} f(w)dw = \sum_{k,l} \int_{\partial Q_{k,l}} f(w)dw = 0 \quad (6.25)$$

Für eine Homotopie mit festen Endpunkten sind (nach Parametertransformation von $[\alpha, \beta] \times [0, 1]$ auf $[0, 1] \times [0, 1]$) das zweite und vierte Stück von (6.22) konstant, das erste gleich γ_1 und das dritte $\bar{\gamma}_2$. Daraus folgt (6.20). $\square$

Nun ist klar, was zu tun ist.

Definition 6.7. Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heisst *einfach zusammenhängend*, falls jeder geschlossene Weg in D null-homotop ist. Anschaulich gesprochen: Jeder geschlossene Weg lässt sich in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen. Noch anschaulicher: D hat keine Löcher.

Theorem 6.8. Ist D einfach zusammenhängend, so gilt für jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ und jeden geschlossenen Weg γ in D

$$\int_{\gamma} f(w)dw = 0 \quad (6.26)$$

Insbesondere besitzt jede holomorphe Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet eine Stammfunktion. Diese ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Beweis. Per Definition ist jeder geschlossene Weg in D homotop zu einem konstanten Weg, über den das Integral verschwindet. Die Aussage folgt damit aus Lemma 6.6 in Verbindung mit (einem Spezialfall von) Proposition 4.1. $\square$

In §10 (siehe Korollar 10.2) wird gezeigt, dass einfacher Zusammenhang auch notwendig ist für die Existenz beliebiger Stammfunktionen. Wir halten hier als Anwendung und in Verallgemeinerung der Beispiele 2.23 und 2.24 die Existenz von Wurzel- und Logarithmusfunktionen fest.

Theorem 6.9. Sei $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f \in \mathcal{O}(D)$ ohne Nullstellen auf D .

- (i) Es existiert eine holomorphe Funktion $l : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(l(z)) = f(z)$ für alle $z \in D$. l ist eindeutig bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$.
- (ii) Für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existiert eine holomorphe Funktion $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $(g_n(z))^n = f(z)$ für alle $z \in D$. g_n ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer n -ten Einheitswurzel.

Beweis. (i) Wegen $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ ist die *logarithmische Ableitung*

$$h(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (6.27)$$

wohl-definiert und holomorph auf D , s. Lemma 2.4. Da D einfach zusammenhängend ist, existiert gemäss Theorem 6.8 eine Funktion $H \in \mathcal{O}(D)$ mit $H'(z) = h(z)$, die, so die Behauptung, bis auf eine additive Konstante gleich der gesuchten Funktion ist.

Bew.: Die Funktion $z \mapsto \frac{\exp(H(z))}{f(z)}$ ist holomorph auf D mit Ableitung

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\exp(H(z))}{f(z)} \right) = \frac{\exp(H(z))}{f(z)} \left(H'(z) - \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = 0 \quad (6.28)$$

und daher wegen Korollar 3.8 konstant, da D zusammenhängend ist. Es existiert also eine Zahl $\lambda \neq 0$ so, dass $\exp(H(z)) = \lambda f(z)$ für alle z . Gemäss Beispiel 2.24 und Proposition 2.13 existiert eine additiv bis auf $2\pi i\mathbb{Z}$ eindeutige Zahl c so, dass $\lambda = e^c$. Mit $l(z) := H(z) - c$ folgt die Behauptung.

(ii) Die Funktion

$$g_n(z) := \exp(l(z)/n) \quad (6.29)$$

ist holomorph und erfüllt $(g_n(z))^n = f(z)$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Formel von de Moivre (1.14) und dem Identitätssatz Proposition 5.1. $\square$

Globale Cauchysche Integralformel

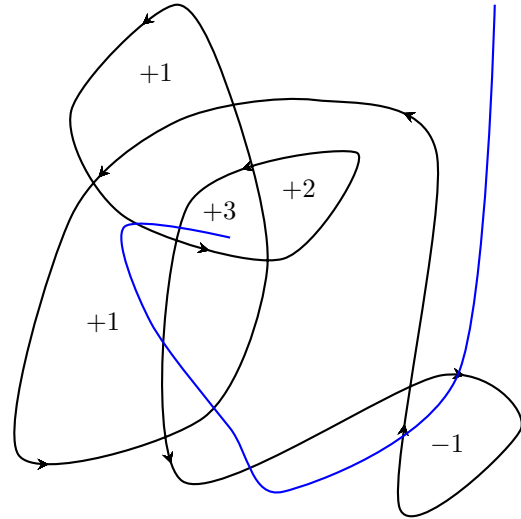
Die in Theorem 6.6 ausgedrückte Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals holomorpher Funktionen ist eine weitreichende Verallgemeinerung des Kriteriums 3.6 für Dreieckswege in konvexen Gebieten. Sie kann damit auch als globale Version der “Additivität im Integrationsbereich” (3.11) aufgefasst werden. Analog hängt auch die allgemeinste Fassung der Cauchyschen Integralformel 4.4 von einer globalen Formulierung des fundamentalen Beispiels 4.2 ab. Dies führt auf eine alternative Umsetzung der auf S. 50 formulierten Idee.

Definition 6.10. Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg, $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ (womit wir ohne Verwirrung $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ meinen). Dann heisst das Integral

$$W(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s) - z} ds \quad (6.30)$$

Windungszahl von γ bezüglich z .

Ein Rückblick auf die Beispiele 4.2 und 4.3 zeigt, dass für einen stetig differenzierbaren Weg der Imaginärteil des Integranden in (6.30) den infinitesimalen Zuwachs des Arguments des “Fahrstrahls” von w relativ zu z misst, der Realteil die (logarithmische) Abstandsänderung. Der Begriff ist damit höchst plausibel und anschaulich auch nicht schwer auszuwerten.⁵¹



Lemma 6.11. Die Windungszahl erfreut sich der folgenden Eigenschaften:

- (i) Stets ist $W(\gamma, z)$ ganzzahlig.
- (ii) Für gegebenen Weg γ ist die Abbildung $z \mapsto W(\gamma, z)$ lokal konstant auf $\mathbb{C} \setminus \gamma$.
- (iii) Auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma$ ist $W(\gamma, z) = 0$.

Beweis. (i) Ist (wie von jetzt an wieder stillschweigend und ohne grossen Verlust vorausgesetzt) γ stückweise stetig differenzierbar, so ist für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ die Funktion

$$[\alpha, \beta] \ni t \mapsto G(t) := \exp\left(-\int_{\alpha}^t \frac{\dot{\gamma}(s)ds}{\gamma(t) - z}\right) \cdot (\gamma(t) - z) \quad (6.31)$$

(stetig und) stückweise stetig differenzierbar mit Ableitung $\dot{G}(t) = 0$ auf allen Stücken, und daher konstant. Es folgt

$$\exp(-2\pi i W(\gamma, z))(\gamma(\beta) - z) = G(\beta) = G(\alpha) = \gamma(\alpha) - z \quad (6.32)$$

und daraus wegen $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha) \neq z$ wieder mit Proposition 2.13 die Behauptung.

(ii) Der Integrand von (6.30) erfüllt die Voraussetzungen von Korollar 5.7 auf allen Stücken des Parameterintervalls, das Ergebnis ist also (auch noch nach der Summe über die Stücke) stetig in z und damit lokal konstant da ganzzahlig.⁵²

(iii) Das Bild von γ ist kompakt und damit beschränkt. Es existiert also ein R so, dass $\gamma \subset \overline{B}_R(0)$. Mit “unbeschränkter Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma$ ” ist die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0)$ ⁵³ gemeint. Aus der Standardabschätzung folgt für

⁵¹ z.B. mit der *Ingenieursregel*: Wähle einen Weg δ von z ins Unendliche, der γ transversal schneidet und zähle die Schnittpunkte (mit Vorzeichen!)

⁵² Alternativ ist $W(\gamma, z)$ ja sogar holomorph in $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ mit Ableitung

$$\frac{d}{dz} W(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(w - z)^2} dw = 0 \quad (6.33)$$

da die Funktion $w \mapsto \frac{1}{(w - z)^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ die Stammfunktion $w \mapsto -\frac{1}{w - z}$ besitzt.

⁵³ Dies ist eine zusammenhängende Menge, so dass die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma$ eindeutig ist.

alle $|z| > R$

$$|W(\gamma, z)| \leq \frac{l(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{|z| - R} \quad (6.34)$$

Für $|z| > R + \frac{l(\gamma)}{2\pi}$ folgt $W(\gamma, z) = 0$ wegen der Ganzzahligkeit und damit wegen (ii) die Behauptung. $\square$

Diesen Beweis (einschliesslich der Verwendung des Korollars 5.7) hätte man auch ohne die “magischen” Erkenntnisse der vorausgegangenen §§ führen können. Der Schlüssel für das auf der Windungszahl basierte Kriterium für die Existenz von globalen Stammfunktionen ergibt sich jedoch erst aus der Verbindung mit den lokalen Resultaten.

Definition des Inneren und äusseren hier vorziehen!!!

Theorem 6.12 (Dixon, 1971). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ ein geschlossener Weg mit $W(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(U)$ und alle $z \in U \setminus \gamma([\alpha, \beta])$*

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = 2\pi i W(\gamma, z) f(z) \quad (6.35)$$

Beweis. Zu zeigen ist gemäss Definition 6.10, dass die Funktion

$$G(z) := \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \quad (6.36)$$

für alle $z \in U \setminus \gamma$ identisch verschwindet. Hierzu⁵⁴ verwenden wir den Satz von Liouville 4.13, indem wir

(α) G zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion fortsetzen und

(β) zeigen, dass $G(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$.

1. Schritt: Zur Fortsetzung auf U wollen wir Korollar 5.7 über Integrale mit holomorphen Parametern benutzen und untersuchen hierfür den Integranden von (6.36). Die Abbildung

$$g : U \times U \rightarrow \mathbb{C} \quad g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{falls } w \neq z \\ f'(w) = f'(z) & \text{falls } w = z \end{cases} \quad (6.37)$$

ist (als gemeinsame Funktion beider Argumente auf ganz $U \times U$) stetig und für alle $w \in U$ als Funktion von $z \in U$ auch holomorph.⁵⁵ Das Integral (6.36) definiert⁵⁶ also eine für alle $z \in U$ holomorphe Funktion (die wir weiterhin mit G bezeichnen).

⁵⁴Im Unterschied zum Beweis von Theorem 4.4 können wir uns ohne genaue Kenntnisse über U und γ nicht auf eine kleine Umgebung von z zurückziehen.

⁵⁵Für $z \neq w$ ist dies offensichtlich, in einer Umgebung von w folgt es aus der Analytizität von f , d.h. der Tatsache, dass der Differenzenquotient aus Definition 2.3 (iv) nicht nur stetig sondern sogar holomorph ist, bzw. alternativ aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 7.2. Man kann das auch ausführlicher begründen.

⁵⁶indem wir natürlich Korollar 5.7 auf das *parametrisierte Integral* anwenden

2. Schritt: Zur Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ definieren wir das *Äussere* von γ als die offene Menge

$$\text{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mid W(\gamma, z) = 0\} \quad (6.38)$$

und benutzen, dass nach Voraussetzung $\mathbb{C} \setminus U \subset \text{Ext}(\gamma)$ und daher $\mathbb{C} = U \cup \text{Ext}(\gamma)$, während für alle $z \in U \cap \text{Ext}(\gamma)$ die im 1. Schritt definierte Fortsetzung zu

$$G(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (6.39)$$

vereinfacht werden kann. Die Vorschrift

$$G(z) = \begin{cases} \int_{\gamma} g(z, w) dw & z \in U \\ \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw & z \in \text{Ext}(\gamma) \end{cases} \quad (6.40)$$

ist dann widerspruchsfrei und für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph.

3. Schritt: Für R so gross, dass $\gamma([\alpha, \beta]) \subset \overline{B}_R(0)$ ist gemäss Lemma 6.11 (iii) für alle $|z| > R$ die zweite Formel in (6.40) zuständig, und daher gilt für solche z :

$$|G(z)| \leq \frac{l(\gamma)}{|z| - R} \max\{|f(w)| \mid w \in \gamma([\alpha, \beta])\} \quad (6.41)$$

Daraus folgt, dass G beschränkt ist und identisch verschwindet. $\square$

Ergänzungen

Zunächst einmal ist festzuhalten, dass Theorem 6.12 selbst auch wieder eine Version des Cauchy-Integralsatzes liefert.

Korollar 6.13. *Sei γ ein geschlossener Weg in U mit $W(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(U)$*

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 0 \quad (6.42)$$

Beweis. Da das Bild von γ kompakt ist, existiert ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Dann besagt die globale Cauchy-Formel, angewandt auf die Funktion $z \mapsto g(z) := (z - z_0)f(z)$

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} \frac{(w - z_0)f(w)}{w - z_0} dw = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w - z_0} dw = 2\pi i W(\gamma, z_0) g(z_0) = 0 \quad (6.43)$$

$\square$

Insbesondere lässt sich damit ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Existenz globaler Stammfunktionen angeben.

Proposition 6.14. *Auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ besitzt dann und nur dann jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ eine Stammfunktion, wenn für alle geschlossenen Wege γ in D gilt, dass $W(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$, d.h. in Worten, wenn das Komplement von D im Äusseren von γ liegt.*

Beweis. Wegen Proposition 4.1 folgt die Hinrichtung sofort aus Korollar 6.13. Besitzt umgekehrt jede auf D holomorphe Funktion eine Stammfunktion, so insbesondere auch der Integrand $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ in der Definition von $W(\gamma, z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$, und alle geschlossenen Wege $\gamma \subset D$, d.h. $W(\gamma, z) = 0$. $\square$

Als nächstes vergleichen wir die Konsequenzen von Theorem 6.12 für die Existenz globaler Stammfunktionen mit dem Begriff des einfachen Zusammenhangs.

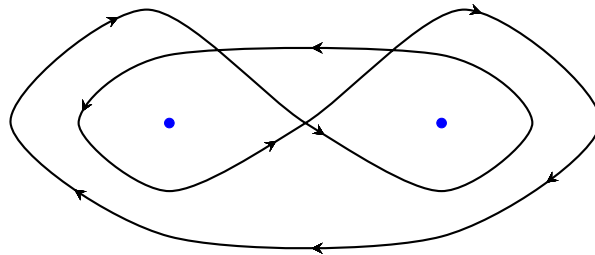
Korollar 6.15. *Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so gilt $W(\gamma, z) = 0$ für alle geschlossenen Wege γ in D , $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Insbesondere gilt Gl. (6.35), d.h.*

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i W(\gamma, z) f(z) \quad (6.44)$$

für alle $\gamma, z \in D \setminus \gamma$, und $f \in \mathcal{O}(D)$.

Beweis. Der Integrand $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ in der Definition der Windungszahl ist für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$ auf ganz D holomorph. Da jeder Weg in D null-homotop ist, folgt daher $W(\gamma, z) = 0$ aus der Homotopie-Invarianz 6.6 des Wegintegrals. $\square$

Zu beachten ist dabei allerdings, dass das Verschwinden der Windungszahl $W(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$ im Allgemeinen nicht ausreicht, um zu folgern, dass γ in D null-homotop ist, siehe Bild. Für einzelne Wege ist die Windungszahl also eine gröbere Invariante als die Homotopieklasse. Erst über alle Wege



genommen ist $W(\gamma, \mathbb{C} \setminus D) = 0$ äquivalent zum einfachen Zusammenhang, wie aus Theorem 10.1 folgen wird. Letztlich ist aber die Charakterisierung einfach zusammenhängender Mengen über die Windungszahl genauso handlich (oder unhandlich) wie die ursprüngliche Definition. Eine auch in der Praxis nicht ganz unnütze Konstruktion folgt aus dem vielbesungenen *Jordanschen Kurvensatz*.

Theorem 6.16. *Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ein einfach geschlossener Weg (a.k.a., Jordankurve), d.h. γ ist stetig, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ aber $\gamma|_{[\alpha, \beta]}$ ist injektiv. Dann gilt*

- (i) $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten (von denen genau eine unbeschränkt ist); beide haben den (topologischen) Rand $\gamma([\alpha, \beta])$.
- (ii) Die beschränkte Komponente D von $\mathbb{C} \setminus \gamma$ ist einfach zusammenhängend und es gilt entweder $W(\gamma, D) = 1$ oder $W(\gamma, D) = -1$.

Beweis. Für stückweise stetig differenzierbare Wege ist der Beweis relativ einfach durch Reduktion auf die in Fussnote 51 erwähnte Methode zur Berechnung der Windungszahl, s. z.B. Stein-Shakarchi. Interessanterweise ist er schon für rektifizierbare Wege deutlich schwieriger. Einen Nachführung des ursprünglichen Beweises für beliebige Wege findet man bei Th. C. Hales, “Jordan’s Proof of the Jordan Curve Theorem” (2007). Heutzutage gehört er aber in jedem Fall in einen Kurs zur Algebraischen Topologie, s. z.B. Hatcher “Algebraic Topology”, Section 2.B. Man beachte, dass nicht jedes einfach zusammenhängende Gebiet eine Jordankurve als Rand hat. $\square$

§ 7 Der Residuensatz

Nach der topologischen Bewusstseinsweiterung des letzten § stellt sich nun die Frage nach einer möglichen Ergänzung, wenn nicht Vervollständigung, des Raums der zu integrierenden Funktionen. Lokal gibt es zwar aufgrund des engen Zusammenhangs zwischen Differenzier- und Integrierbarkeit sowie Ergebnissen der Art 5.5 keinen Spielraum im Hinblick auf unstetiges oder nicht differenzierbares Verhalten. Schon auf “etwas grösseren Mengen” hingegen kann es, wie auf S. 49 festgehalten, durchaus sinnvoll und interessant sein, Funktionen zu integrieren, die an gewissen Stellen noch nicht einmal definiert sind. Wesentlich hierfür ist die Erkenntnis, dass “komplexe Ränder”, wenn sie in Analogie zur reellen Analysis als Nullstellen natürlicher (komplex-wertiger!) Funktionen definiert werden, im Unterschied zum reellen Fall Definitionsgebiete *eben nicht* in Stücke zerteilen, sondern immer noch umgangen werden können. Dies führt in Verbindung mit den lokalen Resultaten auf eine (bis auf den Sprachmissbrauch!) ganz harmonische Klassifikation möglichen singulären Verhaltens.

Definition 7.1. Sei $U \in \mathbb{C}$ offen.

- (i) Eine *isolierte Singularität* einer Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ ist ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ mit der Eigenschaft, dass für ein $\delta > 0$ die *punktierte Kreisscheibe* $\dot{B}_\delta(z_0) \subset U$ (s. (2.2)).
- (ii) Bevorzugte Alternative: Eine *holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten auf U* ist eine “Ausnahmemenge” $A \subset U$ ohne Häufungspunkte in U und eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus A)$. Notation: $f \in \mathcal{O}_{\text{sing}}(U)$.
- (iii) Eine isolierte Singularität z_0 von f heisst *hebbbar*, wenn f sich zu einer in einer ganzen (nicht-punktierten) Umgebung von z_0 holomorphen Funktion fortsetzen lässt.

Beispiele. Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(D)$ nicht identisch null, so ist gemäss dem Identitätssatz 5.1 die Nullstellenmenge N_f ohne Häufungspunkte in D , und die multiplikative Inverse $f^{-1} \in \mathcal{O}_{\text{sing}}(D)$ eine Funktion mit isolierten Singularitäten in N_f .

Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, $f(z) = \frac{z-i}{z^2+1}$ hat eine hebbare Singularität in $z = i$.

Theorem 7.2 (Riemannscher Hebbarkeitssatz). z_0 ist eine hebbare Singularität von $f \in \mathcal{O}_{\text{sing}}(U)$ genau dann, wenn f auf einer punktierten Kreisscheibe $\dot{B}_\delta(z_0) \subset U$ beschränkt ist.

Beweis. Die Rückrichtung ist aus Stetigkeitsgründen offensichtlich. Ist andererseits f auf $\dot{B}_\delta(z_0)$ beschränkt,⁵⁷ so ist die Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{falls } z \in U \setminus \{z_0\} \\ 0 & \text{falls } z = z_0 \end{cases} \quad (7.1)$$

offensichtlich für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ differenzierbar, und wegen f lokal beschränkt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \quad (7.2)$$

⁵⁷typische Situation: f ist nach z_0 stetig fortsetzbar

§ 7. DER RESIDUENSATZ

auch in z_0 mit $g'(z_0) = 0$. Die Potenzreihe von g in z_0 hat daher die Gestalt

$$g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (7.3)$$

so dass die für alle z in einer punktierten Kreisscheibe bereits gültige Formel

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k \quad (7.4)$$

f holomorph nach z_0 fortsetzt. □

Proposition 7.3 (Satz von Casorati-Weierstrass). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}_{\text{sing}}(U)$. Dann ist genau eine der drei folgenden Aussagen richtig.*

(α) z_0 ist keine oder eine hebbare Singularität von f . In diesem Fall ist entweder f in einer Umgebung von z_0 identisch null oder es existiert ein eindeutiges $m \in \mathbb{N}_0$ und eine in z_0 holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}_{\text{sing}}(U)$ mit $g(z_0) \neq 0$ so, dass $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$. Ist $m > 0$, so heisst z_0 Nullstelle der Ordnung m .

(β) Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $h(z) := (z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität in z_0 mit $h(z_0) \neq 0$ besitzt. In diesem Fall ist m eindeutig und z_0 heisst ein Pol der Ordnung m . Ist $m = 1$, so sagt man auch einfacher Pol.

(γ) Für jedes $\delta > 0$ ist das Bild von $\dot{B}_\delta(z_0) \cap U$ unter f dicht in $\mathbb{C}$. In diesem Fall heisst z_0 eine wesentliche Singularität.

Beweis. Im Falle (α) ist f in einer Umgebung von z_0 beschränkt, deren Bild ist also insbesondere nicht dicht. Ist f nicht lokal null, so ist m der Index des ersten nicht-verschwindenden Koeffizienten in der Potenzreihendarstellung von f um z_0 .

Im Falle (β) existiert ein $\delta > 0$ so, dass $|h(z)| > \frac{|h(z_0)|}{2} > 0$ für alle $z \in B_\delta(z_0) \subset U$ und daher

$$|f(z)| > \frac{|h(z_0)|}{2|z - z_0|^m} \quad (7.5)$$

für alle $z \in \dot{B}_\delta(z_0)$. Deren Bild ist damit weder dicht noch beschränkt. Vergrössern von m macht $h(z_0) = 0$, Verkleinern $h(z)$ lokal unbeschränkt.

Zum Abschluss nehmen wir an, dass das Bild einer punktierten Kreisscheibe um z_0 nicht dicht ist, d.h. es existiert ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$ so, dass $|f(z) - w| > r$ für alle $z \in \dot{B}_\delta(z_0)$, ohne Einschränkung $\subset U$. Dann aber ist

$$j(z) = \frac{1}{f(z) - w} \quad (7.6)$$

auf $\dot{B}_\delta(z_0)$ beschränkt, und besitzt nach dem Riemannschen Hebbbarkeitssatz eine holomorphe Fortsetzung nach z_0 . Ist $j(z) = (z - z_0)^m g(z)$ die Darstellung nach (α), so folgt auf $\dot{B}_\delta(z_0)$

$$f(z) = w + \frac{1}{(z - z_0)^m g(z)} \quad (7.7)$$

Für $m > 0$ ist dies Fall (β), für $m = 0$ Fall (α). □

Definition 7.4. Ist z_0 keine wesentliche Singularität von $f \in \mathcal{O}_{\text{sing}}(U)$, so setzt man die *Ordnung von f in z_0* als

$$\text{ord}_{z_0}(f) = -\inf\{m \in \mathbb{Z} \mid (z - z_0)^m f(z) \text{ hat keine oder eine hebbare Singularität}\} \quad (7.8)$$

Dies ist im Fall (α) (entweder null oder) die Ordnung der Nullstelle bzw. ∞ falls $f \equiv 0$ in einer Umgebung von z_0 , im Fall (β) die negative Polordnung und im Fall (γ) formal $-\infty$.

Das Verhalten (7.5) deuten wir unter Verweis auf Kapitel 3 auch als $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Eine alternative Sichtweise auf die lokale Struktur von Singularitäten ergibt sich aus der folgenden Verallgemeinerung der Potenzreihendarstellung.

Definition 7.5. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und zwei komplexe Folgen $(a_n)_{n=0,1,\dots}$, $(a_{-n})_{n=1,2,\dots}$ heisst das Paar von Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (7.9)$$

Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt z_0 . Sie heisst konvergent, wenn beide Reihen in (7.9) getrennt konvergieren. In diesem Fall ist der Wert der Laurent-Reihe die Summe der Grenzwerte. Man schreibt für die Laurent-Reihe bzw. ihre Werte auch $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Gemäss Proposition 2.11 konvergiert die Reihe mit positiven Potenzen von $z - z_0$ für

$$|z - z_0| < R := (\limsup |a_n|^{1/n})^{-1} \quad (7.10)$$

und analog die mit negativen Potenzen für

$$|z - z_0|^{-1} < S^{-1} := (\limsup |a_{-n}|^{1/n})^{-1} \quad (7.11)$$

Daraus folgt, dass die Laurent-Reihe $L(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ auf dem *Kreisring* [Notation auf \$A_{S,R}\$ wechseln???](#)

$$A_{R,S}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid S < |z - z_0| < R\} \quad (7.12)$$

konvergiert, dort eine holomorphe Funktion darstellt, und gliedweise abgeleitet werden darf. (Interessant ist dies natürlich eigentlich nur dann, wenn $S < R$.) Ein wesentlicher Unterschied zu Potenzreihen ist, dass Laurent-Reihen mit $a_{-1} \neq 0$ auf ihrem Konvergenz-Kreisring keine Stammfunktion besitzen. (Zumindestens ist ja nach dem Ableiten der Koeffizient von $(z - z_0)^{-1}$ gleich 0. Hierzu gleich mehr.)

Beispiele. Für $|z| > 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{1 - z}$

· Für $|z| > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

Die Umkehrung gilt aber wie für analytisch $\Leftrightarrow$ holomorph in Kreisscheiben.

§ 7. DER RESIDUENSATZ

Proposition 7.6. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Sei ausserdem $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\infty \geq R > S \geq 0$ mit $A_{R,S}(z_0) \subset U$. Dann besitzt f eine für alle $z \in A_{R,S}(z_0)$ konvergente Entwicklung in eine Laurent-Reihe⁵⁸

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in A_{R,S}(z_0) \quad (7.13)$$

deren Koeffizienten für beliebiges $\rho \in (S, R)$ als Integral

$$a_n = a_n^{(z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad (7.14)$$

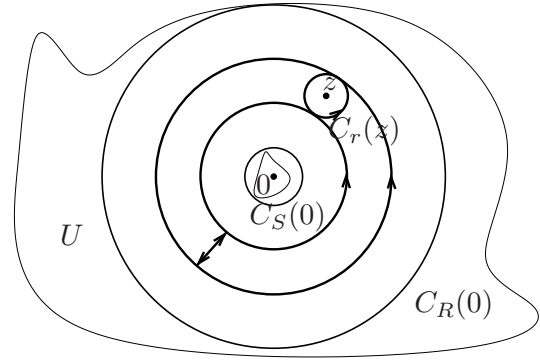
berechnet werden können (so dass die Darstellung insbesondere unabhängig von der genauen Wahl von S und R ist).

Beweis. Wir nehmen der Einfachheit halber $z_0 = 0$.

Sei $r > 0$ so, dass $\overline{B}_r(z) \subset A_{R,S}(0)$. Dann gilt nach 4.4

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (7.15)$$

Überprüft man unschwer, dass der wie skizziert zusammengesetzte Weg in $U \setminus \{z\}$ nullhomotop ist, und der Integrand holomorph, so folgt aus Theorem 6.6



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{|z|+r}^+(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{|z|-r}^+(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (7.16)$$

Im ersten Integranden gilt $|z| < |w|$, d.h. $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$ im zweiten $|z| > |w|$ und $\frac{1}{w-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{w^{n+1}}$. Mit dem gleichen Konvergenzargument wie im Beweis von Theorem 4.7 folgt die Behauptung, wobei zunächst

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \begin{cases} \int_{C_{|z|+r}^+(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw & n \geq 0 \\ \int_{C_{|z|-r}^+(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw & n < 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

was aber äquivalent zu (7.14) ist, da alle $C_\rho^+(0)$ im Kreisring $A_{R,S}(0)$ homotop zueinander sind. $\square$

Sei nun $f \in \mathcal{O}_{\text{sing}}(U)$ eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten gemäss Definition 7.1 (ii), d.h. eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge $\{z_1, z_2, \dots\}$ von Punkten $z_i \in U$, welche keinen Häufungspunkt in U hat, zusammen

⁵⁸Im Allgemeinen muss weder z_0 noch der Abschluss des Kreisrings in U enthalten sein und R, S^{-1} sind auch nur kleiner-gleich den Konvergenzradien der Laurent-Reihe.

mit einer holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_1, z_2, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann existiert für jedes z_i ein $R_i > 0$ so, dass $B_{R_i}(z_i) \subset U$ und f auf $\dot{B}_{R_i}(z_i)$ definiert und holomorph ist. Aus Proposition 7.6 folgt dann, dass f auf $\dot{B}_{R_i}(z_i) = A_{R_i,0}(z_i)$ durch eine Laurent-Reihe dargestellt wird, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(i)}(z - z_i)^n \quad \forall z \in B_{R_i}(z_i) \setminus \{z_i\} \quad (7.18)$$

Definition 7.7. In der Entwicklung (7.18) heisst

$$H_i(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(i)}(z - z_i)^n \quad (7.19)$$

der *Hauptteil* der Laurent-Reihe, $\sum_{n=0}^{\infty}$ der *Nebenteil*, und

$$a_{-1}^{(i)} =: \text{Res}_{z_i}(f) \quad (7.20)$$

das *Residuum* von f in z_i . Gemäss (7.14) gilt

$$\text{Res}_{z_i}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+(z_i)} f(w) dw \quad (7.21)$$

für alle $0 < \rho < R_i$ (was man aber für die Berechnung selten benutzt, s. Lemma 7.10).

Beobachtung: In der Umgebung einer isolierten Singularität ist der Konvergenzradius des Hauptteils stets $S_i^{-1} = \infty$. Die Korrespondenz mit der Trichotomie 7.3 ist wie folgt:

(α) Die Singularität z_i ist genau dann hebbar, wenn der Hauptteil um z_i verschwindet, d.h. $a_n^{(i)} = 0 \ \forall n < 0$.

(β) Die Singularität z_i ist genau dann ein Pol, wenn der Hauptteil endlich ist, d.h. für ein $m_i > 0$ (der Ordnung des Pols) ist $a_n^{(i)} = 0$ für alle $n < -m_i$ und $a_{-m_i}^{(i)} \neq 0$.

(γ) Die Singularität ist genau dann wesentlich, wenn der Hauptteil unendlich ist.

Die Formel (7.8) schliesslich lautet

$$\text{ord}_{z_i}(f) = \inf\{m \in \mathbb{Z} \mid a_m^{(i)} \neq 0\} \quad (7.22)$$

Definition 7.8. Eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten auf U , welche allesamt (höchstens) Pole (sc. endlicher Ordnung) sind, heisst *meromorphe Funktion* auf U . Erweitern wir auf der Grundlage von (7.5) den Wertebereich meromorpher Funktionen, indem wir für jeden Pol z_i von f $f(z_i) = \infty$ setzen, so können wir eine meromorphe Funktion auch also als Abbildung $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auffassen (siehe wieder Kapitel 3). Wir schreiben $\mathcal{M}(U)$ für die Menge der meromorphen Funktionen auf U .

In Fortsetzung von Korollar 2.5 gilt

Proposition 7.9. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann bildet $\mathcal{M}(D)$ mit den natürlichen Verknüpfungen eine differentielle kommutative Divisionsalgebra über $\mathbb{C}$.

§ 7. DER RESIDUENSATZ

Beweis. Aufgrund des Identitätssatzes 5.1 hat die Nullstellenmenge einer meromorphen Funktion $f \neq 0$ mit Ausnahmemenge A keinen Häufungspunkt in $D \setminus A$. Aufgrund von (7.5), d.h. $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \forall a \in A$ (die allesamt Pole sind), können sich die Nullstellen aber auch nicht in A häufen. Wir können also jede von null verschiedene meromorphe Funktion in $\mathcal{O}_{\text{sing}}(D)$ multiplikativ invertieren und überprüfen leicht, dass dabei Nullstellen zu Polen werden und umgekehrt, so dass das Ergebnis wieder in $\mathcal{M}(D)$ liegt.⁵⁹ $\square$

Wir sind nun in der Lage, eine allgemeine Version des Residuensatzes zu formulieren. Davor aber noch eine Formel zur Berechnung von Residuen meromorpher Funktionen, welche direkt aus der Laurententwicklung und der Taylorformel (2.15) herzuleiten ist.

Lemma 7.10. *Ist $z_0 \in U$ ein Pol der Ordnung m einer meromorphen Funktion f auf U , so gilt*

$$\text{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} ((z - z_0)^m f(z)) \quad (7.23)$$

Beweis. Klar auch durch gliedweises Ableiten von (7.19). $\square$

Persönlich finde ich das direkte Einsetzen von Potenzreihen ineinander ökonomischer, da es die für die Benutzung der Formel (7.23) sowieso benötigte Ordnung der Polstelle gleich mitliefert.

Beispiel. Für kleines z ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(\exp(z) - 1)} &= \frac{1}{z(z + \frac{z^2}{2} + \dots)} = \frac{1}{z^2 + \frac{z^3}{2} + \dots} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \dots} \\ &= \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2) \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \mathcal{O}(1) \\ \Rightarrow \text{Res}_0 \frac{1}{z(\exp(z) - 1)} &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Theorem 7.11 (Residuensatz). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}_{\text{sing}}(U)$ mit isolierten Singularitäten in $A \subset U$. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg $\gamma \subset U$ der A nicht trifft und für den $W(\gamma, \mathbb{C} \setminus U) = \{0\}$ ⁶⁰*

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 2\pi i \cdot \sum_{z \in A} \text{Res}_z(f) \cdot W(\gamma, z) \quad (7.25)$$

Beweis. Das Äussere $\text{Ext}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mid W(\gamma, z) = 0\}$ von γ ist offen und enthält gemäss Lemma 6.11 (iii) das Komplement einer hinreichend grossen Kreisscheibe sowie nach Voraussetzung das Komplement von U . Ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus \text{Ext}(\gamma) =$

⁵⁹An einer wesentlichen Singularität häufen sich Nullstellen aufgrund des “grossen Satzes von Picard” so gut wie immer (mit der Exponentialfunktion als bemerkenswerte Ausnahme), so dass also $\mathcal{O}_{\text{sing}}(D)$ insgesamt keinen Körper bilden. **FRAGE:** Kann man $\mathcal{O}_{\text{sing}}(D)$ in einer vernünftigen Weise erweitern, dass es ein Körper wird?

⁶⁰typische Situation: U ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\gamma \subset U \setminus A$

$\gamma \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mid W(\gamma, z) \neq 0\}$ ist daher eine kompakte Teilmenge von U und somit ist

$$A_\gamma = \{z \in A \mid W(\gamma, z) \neq 0\} = \{z_1, \dots, z_r\} \quad (7.26)$$

(leer oder) eine endliche Teilmenge von U . Insbesondere ist die behauptete Summe in (7.25) endlich. Ist dann für jedes $i = 1, \dots, r$

$$H_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(i)} \cdot \frac{1}{(z - z_i)^n} \quad (7.27)$$

der (für einen Pol natürlich endliche) Hauptteil von f um z_i so gilt:

(α) H_i ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$ holomorph.

(β) $\tilde{f} := f - \sum H_i$ hat in jedem z_i verschwindenden Hauptteil, d.h. eine hebbare Singularität, lässt sich also zu einer holomorphen Funktion auf $\tilde{U} = (U \setminus A) \cup A_\gamma = U \setminus (A \setminus A_\gamma)$ fortsetzen.

Da $W(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \tilde{U}$ können wir Korollar 6.13 anwenden und folgern, dass $\int_\gamma \tilde{f}(w)dw = 0$, d.h.

$$\int_\gamma f(w)dw = \sum_{i=1}^r \int_\gamma H_i(w)dw \quad (7.28)$$

Nun besitzt aber für jedes i die ebenfalls auf $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$ holomorphe Funktion

$$\tilde{H}_i(z) = H_i(z) - \frac{a_{-1}^{(i)}}{z - z_i} \quad (7.29)$$

die holomorphe Stammfunktion $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{-n}^{(i)}}{1-n} \frac{1}{(z - z_i)^{n-1}}$, während

$$\int_\gamma \frac{a_{-1}^{(i)}}{w - z_i} dw = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z_i}(f) \cdot W(\gamma, z_i) \quad (7.30)$$

In (7.28) eingesetzt ergibt dies die Behauptung. $\square$

§ 8 Beispiele und Anwendungen

Als “ultimative Form” der Cauchy-Integralformel 4.4 zieht der Residuensatz 7.11 wieder eine Reihe theoretischer Folgerungen sowie eine Vielzahl praktischer Konsequenzen nach sich, von denen wir hier einige exemplarisch vorstellen wollen. Unsere erste Aussage läuft unter dem Namen “Null- und Polstellen zählendes Integral” bzw. “Prinzip vom Argument”.

Proposition 8.1. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{M}(D) \setminus \{0\}$ eine meromorphe Funktion mit Nullstellenmenge N_f und Polstellenmenge P_f . Sei γ ein geschlossener Weg in D mit $\mathbb{C} \setminus D \subset \text{Ext}(\gamma)$, der N_f und P_f nicht trifft. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)} dw &= \sum_{n \in N_f} W(\gamma, n) \cdot m_n - \sum_{p \in P_f} W(\gamma, p) \cdot m_p \\ &= \sum_{z \in D} W(\gamma, z) \cdot \text{ord}_z(f) \end{aligned} \quad (8.1)$$

§ 8. BEISPIELE UND ANWENDUNGEN

Hierbei sind die Summen auf der rechten Seite stets endlich, m_n bezeichnet die Ordnung der Nullstelle $n \in N_f$ und m_p die Ordnung des Pols $p \in P_f$ (s. Prop. 7.3), sowie $\text{ord}_z(f)$ die Ordnung von f in z gemäss Def. 7.4.

Beweis. Der Integrand $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ ist gemäss Prop. 7.9 meromorph auf D mit Ausnahmemenge $N_f \cup P_f$. Für alle $n \in N_f$ gilt gemäss Prop. 7.3 $f(z) = (z - n)^{m_n} g(z)$ mit $g(n) \neq 0$ in einer Umgebung von n und daher (logarithmische Ableitung!)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_n}{z - n} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (8.2)$$

Für alle $p \in P_f$ gilt analog $f(z) = (z - p)^{-m_p} h(z)$ mit $h(p) \neq 0$ in einer punktierten Umgebung von p und daher

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m_p}{z - p} + \frac{h'(z)}{h(z)} \quad (8.3)$$

In beiden Fällen hat der Integrand also einen einfachen Pol in der fraglichen Singularität mit Residuum m_n bzw. $-m_p$. Die Aussagen folgen damit direkt aus dem Residuensatz 7.11. $\square$

Bemerkung. Besonders eingängig ist die Formel (8.1) im Fall $W(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in \text{Int}(\gamma) := \mathbb{C} \setminus (\text{Ext}(\gamma) \cup \gamma)$ (z.B., für eine Jordankurve 6.16, deren Inneres in D liegt). Dann lässt sich die (mit $u \in \mathbb{C}$ leicht verallgemeinerte) Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w) - u} dw = \sum_{\substack{z \in \text{Int}(\gamma) \\ f(z) = u}} \text{ord}_z(f - u) + \sum_{z \in \text{Int}(\gamma) \cap P_f} \text{ord}_z f \quad (8.4)$$

interpretieren als Substitution $v = f(w)$ in der Berechnung der Windungszahl

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dv}{v - u} \quad (8.5)$$

des Wegs⁶¹ $f \circ \gamma$ um u . Interessant dabei ist, dass ein Pol für jedes $u \in \mathbb{C}$ die gleiche “negative Windung” beiträgt. Einfachster Fall: $\gamma = C_R^+(0)$, $f(z) = 1/z$, $f \circ \gamma = C_{1/R}^-(0)$, $|u| \neq R$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{1/R}^-(0)} \frac{dv}{v - u} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+(0)} \frac{d(\frac{1}{w})}{\frac{1}{w} - u} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_R^+(0)} \frac{dw}{w(1 - wu)} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_R^+(0)} \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w - \frac{1}{u}} \right) dw \\ &= \begin{cases} -1 & \text{falls } \left| \frac{1}{u} \right| > R \Leftrightarrow |u| < \frac{1}{R} \\ 0 & \text{falls } \left| \frac{1}{u} \right| < R \Leftrightarrow |u| > \frac{1}{R} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.6)$$

⁶¹Dieser Weg verläuft im Bild $f(D)$, welches gemäss dem Satz von der Gebietstreue 5.4 wieder ein Gebiet ist. Die Interpretation sieht darüber aber etwas hinweg.

Eine unerschöpfliche Quelle von Übungs- und Klausuraufgaben ist der folgende “Satz von Rouché”.

Proposition 8.2 (Satz von Rouché). *Sei D ein Gebiet und γ ein geschlossener Weg in D mit $W(\gamma, D \setminus \gamma) \in \{0, 1\}$ und $\text{Int}(\gamma) \subset D$. Ist $f \in \mathcal{O}(D)$ (ohne Nullstellen auf γ) und $h \in \mathcal{O}(D)$ eine (als “Störung” von f aufgefasste) Funktion mit*

$$|h(w)| < |f(w)| \quad \text{für alle } w \in \gamma([\alpha, \beta]) \quad (8.7)$$

so hat $g := f + h$ (ebenfalls keine Nullstelle auf der Spur von γ und) im Inneren von γ (mit Multiplizität gezählt) die gleiche Anzahl Nullstellen wie f .

Beweis. Tatsächlich impliziert (8.7) alleine, dass die für alle $s \in [0, 1]$ holomorphe Funktion $f_s := f + sh$ keine Nullstellen auf der Spur von γ hat.⁶² Das Integral

$$\nu(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_s(w)}{f_s(w)} dw \quad (8.8)$$

zählt also gemäss Proposition 8.1 für alle $s \in [0, 1]$ die Anzahl Nullstellen von f_s im Inneren von γ und muss als ganzzahlige stetige⁶³ Funktion $s \mapsto \nu(s)$ konstant sein. Dies impliziert die Behauptung. $\square$

Für die Anwendungen ist es manchmal opportun, h nicht als Störung von f , sondern von g anzusehen, d.h. (8.7) mit g auf der rechten Seite zu testen. Beachte auch dass es genügt, wenn (8.7) *punktweise* auf γ gilt, obwohl in der Praxis häufig die stärkere Bedingung $\max\{|h(w)| \mid w \in \gamma\} < \min\{|f(w)| \mid w \in \gamma\}$ geprüft wird.⁶⁴ Jedenfalls erlaubt der Satz von Rouché eine gute Kontrolle über das lokale Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen, wie etwa einen alternativen Beweis von Offenheits- 5.3 und Maximumprinzip 5.2 (siehe Übungen). Besonders reizvoll ist die...

Proposition 8.3 (Lagrangesche Inversionsformel). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$ holomorph, $z_0 \in U$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann gilt:*

(i) *Es existiert eine offene Umgebung V von z_0 so, dass die Einschränkung von f auf V eine Bijektion auf eine offene Umgebung W von $u_0 = f(z_0)$ ist. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow V$ ist ebenfalls holomorph.*

(ii) *Für alle $r > 0$ so dass $B_r(z_0) \subset V$ gilt für alle $u \in f(B_r(z_0))$*

$$f^{-1}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z_0)} \frac{wf'(w)}{f(w) - u} dw \quad (8.9)$$

(iii) *Die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung $f^{-1}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(u - u_0)^k$ können für alle $k \geq 1$ über die Formel⁶⁵*

$$b_k = \frac{1}{k} \text{Res}_{z=z_0} ((f(z) - u_0)^{-k}) = \frac{1}{k!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \right)^k \quad (8.10)$$

⁶² $|h(w)| \geq 0 \Rightarrow f(w) \neq 0$, dann umgedrehte Dreiecksungleichung: $|f(w) + sh(w)| \geq |f(w)| - s|h(w)| \geq |f(w)| - |h(w)| > 0$ für alle $w \in \gamma([\alpha, \beta])$, $s \in [0, 1]$.

⁶³Die Stetigkeit von ν folgt durch ein Standardargument aus der (lokal gleichmässigen) Stetigkeit des Integranden als Funktion von s und w .

⁶⁴Es genügt offenbar auch, wenn $\forall w \ |h(w)| < \max\{|f(w)|, |g(w)|\}$.

⁶⁵Beachte die etwas missbräuchliche, aber übliche, Notation für das Residuum.

§ 8. BEISPIELE UND ANWENDUNGEN

berechnet werden, d.h. bis auf den Faktor $1/k$ ist b_k der Koeffizient von $(z - z_0)^{-1}$ in der Laurent-Reihenentwicklung von $(f(z) - u_0)^{-k}$ um z_0 , die einen Pol k -ter Ordnung aufweist. Die führende Konstante ist natürlich $b_0 = f^{-1}(u_0) = z_0$.

(iv) Für alle $g \in \mathcal{O}(U)$ gilt unter den gleichen Voraussetzungen

$$g(f^{-1}(u)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z_0)} \frac{g(w)f'(w)}{f(w) - u} dw = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (u - u_0)^k \quad (8.11)$$

mit

$$c_k = \frac{1}{k} \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{g'(z)}{(f(z) - u_0)^k} \quad (k > 0), \quad c_0 = g(z_0) \quad (8.12)$$

Beweis. Die Aussage (i) folgt eigentlich aus dem Satz über die Umkehrfunktion aus der Analysis 2, zusammen mit der Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit über die Cauchy-Riemann-Gleichungen 2.8, siehe auch Fussnote 15. Alternativ: Wegen $f'(z_0) \neq 0$ existiert ein $\rho > 0$ so dass $\overline{B}_\rho(z_0) \subset U$ und z_0 die einzige (und einfache!) Nullstelle von $f(z) - u_0$ in $\overline{B}_\rho(z_0)$ ist. Dann ist $\sigma := \min\{|f(w) - u_0| \mid w \in C_\rho(z_0)\} > 0$ und für alle $u \in B_\sigma(u_0)$ erfüllen $f(z) - u_0$ und $f(z) - u$ die Voraussetzungen des Satzes von Rouché 8.2 bezüglich $C_\rho^+(z_0)$, so dass auch letztere genau eine Nullstelle in $B_\rho(z_0)$ hat. Dies definiert die Abbildung $f^{-1} : B_\sigma(u_0) \rightarrow B_\rho(z_0)$, und impliziert, dass der Integrand von (8.9) im Inneren von $C_\rho^+(z_0)$ nur genau in $f^{-1}(u)$ einen einfachen Pol hat mit Residuum

$$\lim_{w \rightarrow f^{-1}(u)} w f'(w) \frac{(w - f^{-1}(u))}{f(w) - u} = f^{-1}(u) \quad (8.13)$$

Mit dem Residuensatz 7.11 folgt daraus die Aussage (ii) für alle $u \in W := B_\sigma(u_0)$, und ρ statt r . Theorem 5.7 impliziert, dass f^{-1} holomorph ist, das Offenheitsprinzip 5.3, dass $V := f^{-1}(B_\sigma(u_0))$ eine Umgebung von z_0 ist. Damit ist (i) bewiesen, durch Einschränken erhalten wir die Aussage in der Form (ii). Zum Beweis von (iii) entwickeln wir wie im Beweis von 4.7 den Integranden in eine für alle $|u - u_0| < \min\{|f(w) - u_0| \mid w \in C_r(z_0)\}$ konvergente geometrische Reihe. Aus

$$f^{-1}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w f'(w)}{(f(w) - u_0)^{k+1}} (u - u_0)^k dw \quad (8.14)$$

folgt zunächst

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+(z_0)} \frac{w f'(w)}{(f(w) - u_0)^{k+1}} dw = \operatorname{Res}_{w=z_0} \left(\frac{w f'(w)}{(f(w) - u_0)^{k+1}} \right) \quad (8.15)$$

(vergleiche (7.21)) da der Integrand im Inneren der Kreisscheibe einen einzigen Pol (der Ordnung $k + 1$) in z_0 besitzt. Benutzen wir nun im Sinne einer “partiellen Integration”, dass für alle $k > 0$

$$\frac{w f'(w)}{(f(w) - u_0)^{k+1}} - \frac{1}{k} \frac{1}{(f(w) - u_0)^k} = -\frac{1}{k} \frac{d}{dw} \frac{w}{(f(w) - u_0)^k} \quad (8.16)$$

in einer Umgebung von $C_r(z_0)$ eine Stammfunktion besitzt, so folgt die Behauptung (8.10) aus der Tatsache, dass das Residuum einer “totalen Ableitung” verschwindet.⁶⁶ Die alternative Schreibweise folgt aus (7.23). (iv) geht analog. $\square$

...während wir für den Beweis des Riemannsches Abbildungssatzes 10.1 noch die folgende Stabilitätsaussage von Hurwitz benötigen.

Proposition 8.4. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n) \subset \mathcal{O}(D)$ eine Folge holomorpher Funktionen, welche lokal gleichmässig gegen die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Ist für alle n f_n nullstellenfrei auf D , so ist entweder f auch nullstellenfrei oder identisch null.*

Beweis. Angenommen, f ist nicht identisch null, besitzt aber in $z_0 \in D$ eine Nullstelle. Da f wegen Theorem 5.5 auf D holomorph ist, ist z_0 wegen Proposition 5.1 isoliert, d.h. es existiert ein $r > 0$ so, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{B}_r(z_0) \subset D$. Insbesondere ist $M := \min\{|f(w)| \mid w \in C_r(z_0)\} > 0$. Da (f_n) auf dem Kompaktum $C_r(z_0)$ gleichmässig konvergiert, existiert ein N so, dass $|f(w) - f_N(w)| < M \leq |f(w)|$ für alle $w \in C_r(z_0)$. Damit erfüllen f und f_N bezüglich $C_r^+(z_0)$ die Voraussetzungen des Satzes von Rouché 8.2. Es muss daher f_N ebenfalls eine Nullstelle in $B_r(z_0)$ haben, was aber nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. $\nexists$ $\square$

Korollar 8.5. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n) \subset \mathcal{O}(D)$ eine lokal gleichmässige Folge injektiver Funktionen. Dann ist die Grenzfunktion $f = \lim f_n$ entweder konstant oder auch injektiv.*

Beweis. Angenommen, f ist nicht konstant. Für jedes $z_0 \in D$ ist dann die Folge $(g_n) \subset \mathcal{O}(D)$ mit $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$ auf dem Gebiet $D \setminus \{z_1\}$ nullstellenfrei und konvergiert dort lokal gleichmässig gegen $g(z) = f(z) - f(z_0)$. Nach Proposition 8.4 ist g entweder identisch null oder nullstellenfrei. Im ersten Fall wäre f konstant gleich $f(z_0)$ was wir ausgeschlossen haben, im zweiten gilt $f(z) \neq f(z_0) \forall z \neq z_0$. Dies impliziert die Behauptung. $\square$

Zm Abschluss des § und Kapitels beschreiben wir ein allgemeines “Kochrezept” zur Berechnung bestimmter reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes, das wir bereits in 4.15 und 4.16 vorgeschmeckt hatten. Es muss nicht immer auf Anhieb klappen, Probieren geht über Studieren, weitere Beispiele in den Übungen!

1. Identifiziere das fragliche reelle Integral als Kurvenintegral einer meromorphen Funktion in einem Gebiet der komplexen Ebene. Dabei muss der reelle Integrand nicht unbedingt “in der Form erhalten” bleiben, sondern kann als Real-/Imaginärteil, oder auch eine sonstige Kombination von komplexen Integranden auftauchen.
2. Schliesse den Weg in der komplexen Ebene unter Berücksichtigung von 3. Bei uneigentlichen Integralen werden häufig Grenzwerte über Familien von Wegen gebildet.
3. Schätze die bei 2. eingeführten zusätzlichen Beiträgen geeignet ab, gegebenenfalls mit einer Anpassung der gewählten Schliessung.
4. Werte das geschlossene Kurvenintegral mit Hilfe dem Residuensatz aus. Achte hier besonders auf die durch die Orientierung bestimmten Vorzeichen.

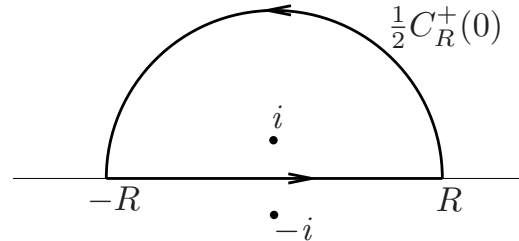
⁶⁶Alternativ: Die Ableitung “tötet” den konstanten Term einer Laurent-Reihe, so dass die abgeleitete Reihe keinen Term der Ordnung $(z - z_0)^{-1}$ hat.

§ 8. BEISPIELE UND ANWENDUNGEN

Beispiel 8.6. Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx \quad (8.17)$$

dessen Konvergenz man durch Vergleich mit $\int_1^\infty 1/x^2$ leicht verifiziert, und das sich auch elementar berechnen lässt, betrachten wir als den Grenzwert eines komplexen Kurvenintegrals von $-R$ nach R der auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ mit Polen bei $\pm i$.



Alsdann schliessen wir den Weg durch einen Halbkreis in der oberen Halbebene, auf dem (für $R > 1$)

$$\left| \frac{1}{1+w^2} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \quad (8.18)$$

so dass durch Standardabschätzung

$$\left| \int_{\frac{1}{2}C_R^+(0)} \frac{1}{1+w^2} dw \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \cdot \pi R \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty \quad (8.19)$$

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}_i \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi \quad (8.20)$$

Beispiel 8.7. Das Integral

$$S := \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (8.21)$$

ist Prototyp einer Klasse, die in der kanonischen Mechanik als Wirkungs- und in der komplexen Geometrie als Periodenintegrale eine grosse Rolle spielen. Zur seiner Berechnung schieben wir (ganz unintuitiv) als erstes das Integral hinaus in die komplexe Ebene, d.h. wir schreiben (unter Berufung auf die stetige Abhängigkeit von Parametern)

$$S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{1-(x-i\epsilon)^2} dx \quad (8.22)$$

wobei $\sqrt{\cdot}$ die in Beispiel 2.23 diskutierte Fortsetzung der Wurfelfunktion in die komplexe Ebene ist: $\sqrt{1-z^2} > 0$ für $1-z^2 > 0$, d.h. $z \in (-1, 1)$, und nicht definiert für $z \in [1, \infty) \cup (-\infty, -1] \subset \mathbb{C}$. Nach dem Hinausschieben ändert sich dann nichts, wenn wir den Integranden durch $i\sqrt{z^2-1}$ ersetzen, wo jetzt $\sqrt{z^2-1} > 0$ für $z > 1$, $\sqrt{z^2-1} < 0$ für $z < -1$, und nicht definiert für $z \in [-1, 1]$. Nach dem Rotieren des Schnitts ist also⁶⁷

$$S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1-i\epsilon}^{1-i\epsilon} i\sqrt{w^2-1} dw \quad (8.23)$$

oder bildlich

⁶⁷Gemeint ist hier natürlich das Integral über die gerade Strecke von $-1-i\epsilon$ nach $1-i\epsilon$.

$$\int \text{---} \overset{-1}{\bullet} \text{---} \underset{[-1,1] - i\epsilon}{\text{---}} \overset{1}{\bullet} \text{---} = \int \overset{-1}{\bullet} \text{---} \underset{[-1,1] - i\epsilon}{\text{---}} \overset{1}{\bullet} \text{---}$$

Nun unterscheidet sich der Integrand auf der gegenüberliegenden Seite des Schnittes im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ gerade durch ein Vorzeichen, sodass

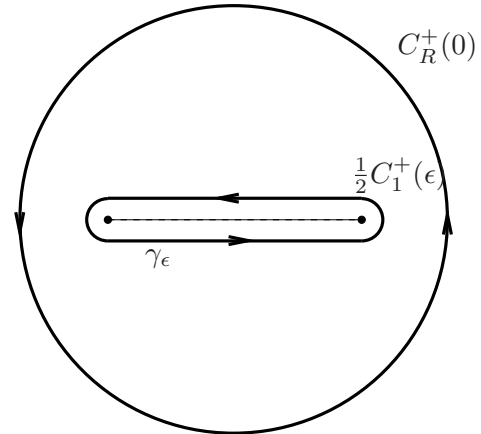
$$S = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1-i\epsilon}^{1-i\epsilon} i\sqrt{w^2-1}dw - \int_{-1+i\epsilon}^{1+i\epsilon} i\sqrt{w^2-1}dw \right) \quad (8.24)$$

Auf den kleinen Halbkreisen $\frac{1}{2}C_\epsilon^+(\pm 1)$ bleibt im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ der Integrand beschränkt, sodass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{2}C_\epsilon^+(\pm 1)} i\sqrt{w^2-1}dw = 0 \quad (8.25)$$

Es folgt durch Schliessen des Weges

$$S = \frac{i}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \sqrt{w^2-1}dw \quad (8.26)$$



Nun liegt aber ein Integral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen Weg in $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ vor. Die Homotopieklasse dieses Wegs ist unabhängig von $\epsilon > 0$ und auch gleich der des Kreises $C_R^+(0)$ für alle $R > 1$, welcher ganz im Kreising $A_{\infty,1}(0)$ verläuft. Die ersten Terme der Laurent-Entwicklung des Integranden lauten

$$\sqrt{w^2-1} = w - \frac{1}{2w} - \frac{1}{8w^3} + \dots \quad (8.27)$$

Nun können wir gliedweise integrieren, um als Endergebnis

$$S = \frac{i}{2} \int_{C_R^+(0)} \left(w - \frac{1}{2w} - \frac{1}{8w^3} + \dots \right) dw = \frac{i}{2} \int_{C_R^+(0)} \frac{-1}{2w} dw = -\frac{i}{2} \cdot \frac{2\pi i}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (8.28)$$

zu erhalten. (Auch dieses Integral geht natürlich mit elementaren Mitteln...)

KAPITEL 3

BIHOLOMORPHE ABBILDUNGEN

Vordergründiges Ziel dieses Kapitels ist die abschliessende Beantwortung der auf Seite 23 aufgeworfenen Frage nach der (topologisch-geometrischen) Charakterisierung offener Teilmengen von $\mathbb{C}$, auf denen alle holomorphen Funktionen globale Stammfunktionen besitzen.⁶⁸ Auf dem Weg dorthin entdecken wir die mutmasslich noch tiefer liegende Verbindung zwischen der *Klassifikation* solcher Teilmengen und der Theorie der auf ihnen definierten holomorphen Funktionen selbst. Dieses Bootstrapping kann als gerechter Ausgleich für die im Vergleich zum Reellen signifikante Verschärfung der lokalen Zusammenhänge gedeutet werden: Wie bei Lemma 1.8 betont sind in $\mathbb{R}$ die natürlich lokal integrierbaren Funktionen die stetigen,⁶⁹ das Analog der Elementargebiete sind die offenen Intervalle, und je zwei offene Intervalle sind homöomorph⁷⁰ zueinander. Ebenso ist im Komplexen die lokale Bedingung für den Erhalt der Integrierbarkeit (nämlich, die Holomorphie der Reparametrisierung) global immer noch flexibel genug um sicherzustellen, dass alle einfach zusammenhängende Gebiete (ausser $\mathbb{C}$ selbst) biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe sind.⁷¹ Wir beginnen im geometrischen Kontext von § 1 und § 2, siehe etwa Proposition 1.6, Korollar 2.9, Beispiel 2.23.

§ 9 Automorphismengruppen

Definition 9.1. Zwei offene Mengen $U, V \subset \mathbb{C}$ heissen *biholomorph äquivalent*, falls eine *biholomorphe Abbildung* $f : U \rightarrow V$ existiert, d.h.

- (i) f ist bijektiv
- (ii) f (aufgefasst als Funktion $U \rightarrow \mathbb{C}$) ist holomorph
- (iii) $f^{-1} : V \rightarrow U$ ist ebenfalls holomorph.

⁶⁸Wie sich mittlerweile wohl herumgesprochen hat, heissen solche Mengen auch *Elementargebiete*. Für diese an sich schöne Heidelberger Lokalkabel kann man im Englischen den Begriff des “holomorphically simply connected domain” benutzen.

⁶⁹nur eben nicht alle. Dies liegt im Wesentlichen an der deutlichen Abschwächung der Konvergenzaussagen am Ende von § 5.

⁷⁰Zwei topologische Räume heissen *homöomorph*, falls eine in beiden Richtungen stetige Bijektion zwischen ihnen existiert.

⁷¹Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend, so dass also etwa eine offene Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ genau dann ein Intervall ist, wenn sie stetiges Bild eines Intervall ist, und in Folge dessen homöomorph zu einem Intervall. Für die Charakterisierung des einfachen Zusammenhangs ist aber die Bijektivität nötig. So ist etwa $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ eine Surjektion einer einfach zusammenhängenden Menge auf eine nicht einfach zusammenhängende, und $Q : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $Q(z) = z^2$ eine Surjektion einer nicht einfach zusammenhängenden Menge auf eine einfach zusammenhängende.

Lemma 9.2. Sind $U, V \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow V$, so sind äquivalent:

- (i) f ist biholomorph
- (ii) f ist bijektiv, holomorph, und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$
- (iii) f ist bijektiv und holomorph
- (iv) f ist bijektiv und als Abbildung zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ konform im Sinne von Korollar 2.9 (d.h., f ist reell differenzierbar und die Ableitung an jeder Stelle konform im Sinne von Proposition 1.6 und Orientierungstreu.)
- (v) f ist bijektiv und eine Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn $f^*(g) := g \circ f$ holomorph auf U ist.

In jedem dieser Fälle ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. (ii) folgt aus (i), da die Ableitung der Umkehrabbildung das Inverse der Ableitung von f ist, diese also invertierbar. (ii) $\Rightarrow$ (i) folgt aus der Lagrange-Inversion 8.3 (bzw. dem Satz über die Umkehrabbildung). (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.

Für den Nachweis von (iii) $\Rightarrow$ (ii) nehmen wir an, dass $f'(z_0) = 0$ wäre für ein $z_0 \in U$. Da f nicht lokal konstant ist, ist z_0 eine isolierte Nullstelle von f' . Setzen wir $w_0 := f(z_0)$, so ist z_0 also eine ebenfalls isolierte *mehrfache* Nullstelle von $f - w_0$. Wählen wir $\rho > 0$ so, dass $\overline{B}_\rho(z_0) \subset U$ und $f(z) \neq w_0$ für alle $z \in \overline{B}_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$ sowie $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{B}_\rho(z_0)$ so folgt für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ mit $|w - w_0| < \min\{|f(u) - w_0| \mid u \in \overline{B}_\rho(z_0)\}$ aus dem Satz von Rouché 8.2, dass $f - w$ (a priori mit Multiplizität gezählt) mehrere Nullstellen in $\overline{B}_\rho(z_0)$ hat, welche aber alle einfach sein müssen da f' dort nicht verschwindet. Dies steht im Widerspruch zur Injektivität von f .⁷²

Die Äquivalenz von (iii) und (iv) ist eine Sache der genannten Propositionen, d.h. insbesondere der Cauchy-Riemann-Gleichungen. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (v) folgt aus der Kettenregel Proposition 2.7, für die Umkehrung genügt es $g = \text{id}|_V : V \rightarrow \mathbb{C}$ zu betrachten um zu folgern, dass f selbst schon holomorph sein muss. Die letzte Aussage folgt wieder trivialerweise aus der Stetigkeit differenzierbarer Funktionen. $\square$

Beispiele 9.3. (i) Die Abbildung $Q : z \mapsto z^2$ ist für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ eine biholomorphe Abbildung der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(e^{-i\varphi}) > 0\}$ auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus e^{2i\varphi}\mathbb{R}_{\leq 0}$ (vgl. Beispiel 2.23).

(ii) Die Exponentialabbildung $\exp$ ist für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ eine biholomorphe Abbildung des Streifen $\{z \mid \varphi - \pi < \text{Im}(z) < \varphi + \pi\}$ auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus e^{i\varphi}\mathbb{R}_{\leq 0}$ (vgl. Beispiel 2.24)

(iii) Die *Cayley-Transformation*, definiert durch

$$z \mapsto \text{Cay}(z) = \frac{z - i}{z + i} \quad (9.1)$$

ist eine biholomorphe Abbildung $\text{Cay} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$ von der *oberen Halbebene* $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ auf die *Einheitskreisscheibe* $\mathbb{E} := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$.⁷³ Die

⁷²Im Reellen gilt die entsprechende Aussage *nicht*. Die Ableitung von $x \mapsto x^3$ verschwindet in $x_0 = 0$, die Abbildung ist aber trotzdem injektiv.

⁷³ $\left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 = \frac{(z-i)(\bar{z}+i)}{(z+i)(\bar{z}-i)} = \frac{|z|^2+1-2\text{Im } z}{|z|^2+1+2\text{Im } z} < 1 \Leftrightarrow \text{Im } z > 0$.

§9. AUTOMORPHISMENGRUPPEN

Umkehrabbildung lautet⁷⁴

$$w \mapsto \text{Cay}^{-1}(w) = i \frac{1+w}{1-w} \quad (9.2)$$

(iv) Für jede Potenzreihe $f(z) = \sum_n a_n z^n$ mit positivem Konvergenzradius R , $a_0 = 0$, und $a_1 \neq 0$ existiert ein $0 < \rho \leq R$ so, dass für alle $0 < r < \rho$ f eine Bijektion von $B_r(0)$ auf $f(B_r(0))$ ist, und insbesondere $f'(z) \neq 0$ für alle $|z| < \rho$. Die Umkehrabbildung ist die kompositionelle Inverse der Potenzreihe (s. Prop. 8.3).

Das letzte Beispiel zeigt die Existenz sehr vieler biholomorpher Abbildungen und illustriert ihre Interpretation als “Reparametrisierungen” offener Teilmengen von $\mathbb{C}$ (mittels Kreisscheiben). Offenbar ist die Verkettung von biholomorphen Abbildungen wieder biholomorph,⁷⁵ so dass insbesondere die *biholomorphen Selbstabbildungen* einer festen offenen Menge eine Gruppe bilden.

Definition 9.4. Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so heisst

$$\text{Aut}(D) := \{f : D \rightarrow D \mid f \text{ ist biholomorph}\} \quad (9.3)$$

die *Automorphismengruppe* von D .

Ein relevanter Unterschied zur reellen Situation⁷⁶ ist, dass komplexe Automorphismengruppen im Allgemeinen “sehr klein” sind (aber dafür umso interessanter!). Wir besprechen prototypisch $\text{Aut}(D)$ für D die komplexe Ebene $\mathbb{C}$, die Riemannsche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$, die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$, und die obere Halbebene $\mathbb{H}$.

Lemma 9.5. *Die Automorphismen von $\mathbb{C}$ sind genau die affin-linearen Transformation, d.h. für jedes $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ existieren komplexe Zahlen $a \in \mathbb{C}^\times$, $b \in \mathbb{C}$ so, dass $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Verknüpfung in der Gruppe lautet $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 + a_1 b_2)$, so dass $\text{Aut}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$.*

Beweis. Als ganze Funktion besitzt f eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum a_n z^n$. Wären unendlich viele $a_n \neq 0$, so hätte die auf der punktierten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ konvergente Laurent-Reihe $\tilde{f}(z) := \sum_n a_n z^{-n}$ eine wesentliche Singularität im Ursprung, wäre also wegen Casorati-Weierstrass 7.3 nicht injektiv⁷⁷ und damit auch f selber nicht. f muss also ein Polynom sein, und zwar vom Grad 1, sonst hätte f' Nullstellen. Es folgt die Behauptung mit $b = a_0$, $a = a_1 \neq 0$. $\square$

⁷⁴ $\text{Im}\left(i \frac{1+w}{1-w}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+w}{1-w} + \frac{1+\bar{w}}{1-\bar{w}} \right) = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} > 0 \Leftrightarrow |w| < 1$

⁷⁵ So sieht man z.B. durch Hintereinanderschalten von Q^{-1} und Cay , dass die geschlitzte Ebene biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe ist. Der Satz von Liouville 4.13 zeigt, dass $\mathbb{E}$ nicht biholomorph zu ganz $\mathbb{C}$ sein kann, während die (nicht-holomorphe!) Abbildung $z \mapsto w = \frac{z}{1+|z|}$, $w \mapsto z = \frac{w}{1-|w|}$ einen Homöomorphismus zwischen diesen Mengen stiftet.

⁷⁶Die Automorphismen eines offenen Intervalls sind genau die streng monotonen stetigen Funktionen die die Endpunkte festlassen oder vertauschen. Davon gibt es i.A. sehr viele.

⁷⁷Genauer: Per Definition von $\tilde{f}$ ist $\tilde{f}(\dot{B}_r(0)) = f(\mathbb{C} \setminus \overline{B}_{1/r}(0))$ für alle $r > 0$. Wenn aber f ein Homöomorphismus ist, so ist $f(\mathbb{C} \setminus \overline{B}_{1/r}(0)) = \mathbb{C} \setminus f(\overline{B}_{1/r}(0))$ und kann nicht dicht in $\mathbb{C}$ sein.

Die Riemannsche Zahlenkugel

Wir hatten im Zusammenhang mit der Klassifikation isolierter Singularitäten in Proposition 7.3 und insbesondere bei der multiplikativen Inversion meromorpher Funktionen in Proposition 7.9 festgestellt, dass es natürlich ist, Polstellen den “formalen Wert” $\infty = 1/0$ zuzuweisen.⁷⁸ Die Theorie der biholomorphen Abbildungen suggeriert dass es sinnvoll sein könnte, auch die Definitionsbereiche auf diese Weise zu erweitern.

Definition 9.6. (i) Die *erweiterten komplexen Zahlen* sind die Menge $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ als *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* der komplexen Ebene aus Lemma 1.4. Dies bedeutet: Eine Teilmenge $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ ist offen wenn entweder $\infty \notin U$ und $U \subset \mathbb{C}$ offen ist im gewöhnlichen Sinne, oder $\infty \in U$ und $\mathbb{C} \setminus U$ kompakt.⁷⁹ *Vorsicht:* Wir rechnen zwar intuitiv mit $1/\infty = 0$, $1/0 = \infty$, dies ist jedoch keine Erweiterung der Körperstruktur auf $\mathbb{C}$ aus Def. 1.1.

(ii) Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in U$ heisst *komplex differenzierbar in ∞* , falls die Funktion $\tilde{f}(z) = f(1/z)$ (welche in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ definiert ist) in 0 komplex differenzierbar ist. Wir nennen f *holomorph in ∞* , wenn f in einer Umgebung von ∞ komplex differenzierbar ist.

(iii) Wir sagen f hat eine *isolierte Singularität bei ∞* , wenn f in einer punktierten Umgebung von ∞ holomorph ist, d.h. wenn $\tilde{f}$ in einer punktierten Umgebung von 0 holomorph ist, und übertragen die Trichotomie 7.3 entsprechend.

Lemma 9.7. (i) $\overline{\mathbb{C}}$ mit obiger Topologie ist ein kompakter topologischer Raum.

(ii) Ganze unendliche Potenzreihen haben eine wesentliche Singularität bei ∞ .

(iii) Die holomorphen Selbstabbildungen der erweiterten komplexen Zahlen sind genau die meromorphen Funktionen auf den erweiterten komplexen Zahlen, und auch genau die rationalen Funktionen auf $\mathbb{C}$ (Übungsaufgabe).

Zur Visualisierung der erweiterten Zahlenebene benutzt man die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow S^2 := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\} \\ \phi(z) &:= \begin{cases} \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) & \text{falls } z = x + iy \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 1) & \text{falls } z = \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (9.4)$$

auf die Einheitssphäre im euklidischen Raum, deren Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \pi : S^2 &\rightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ \pi(x^1, x^2, x^3) &:= \begin{cases} \frac{x^1 + ix^2}{1 - x^3} & \text{falls } x^3 \neq 1 \\ \infty & \text{falls } x^3 = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (9.5)$$

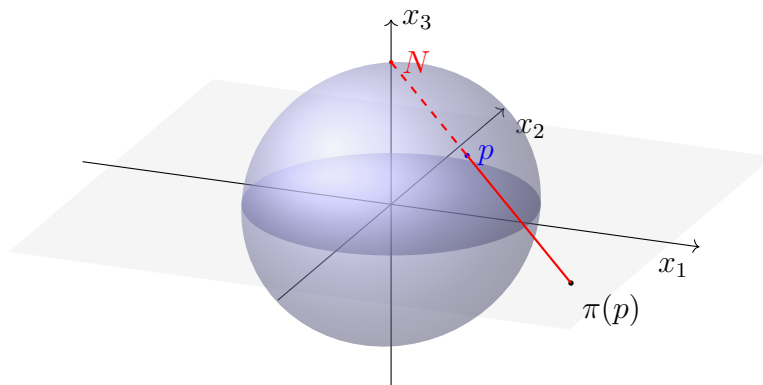
der sog. *stereographischen Projektion* vom Nordpol $N = (0, 0, 1) \in S^2$ auf die Äquatorialebene entspricht.⁸⁰

⁷⁸Wir haben noch nicht erklärt, in welchem Sinne diese Fortsetzung “holomorph” ist. [Dies wird nachgeliefert.](#)

⁷⁹Die Beschränktheit kompakter Mengen stellt sicher, dass bestimmt divergente Folgen (die wir als gegen ∞ konvergent ansehen wollen) genau dadurch charakterisiert sind, dass sie in jede offene Umgebung von ∞ hineinlaufen.

⁸⁰Die Projektion auf die Tangentialebene am Südpol, mit Koordinate $w \in \mathbb{C}$, entspricht dem Koordinatenwechsel $z = \frac{w}{2}$.

§9. AUTOMORPHISMENGRUPPEN



Dies ist nicht nur aus topologischen Gründen sinnvoll, sondern auch, weil die Jacobi-Matrix von ϕ

$$D\phi = \frac{1}{(|z|^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 2y^2 - 2x^2 + 2 & -4xy \\ -4xy & 2x^2 - 2y^2 + 2 \\ 4x & 4y \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

sodass die Gramsche Matrix

$$D\phi^T D\phi = \frac{4}{(|z|^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

proportional zur Einheitsmatrix, d.h. ϕ (im Sinne der Differentialgeometrie) eine *konforme Abbildung* ist. (Für die Fortsetzung von ϕ als konforme Abbildung nach $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$, siehe Übungen.)

Theorem 9.8. (i) Die Automorphismengruppe der erweiterten komplexen Zahlen ist isomorph zur projektiv linearen Gruppe des $\mathbb{C}^2$, d.h.

$$\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \cong PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times \quad (9.8)$$

wo $\mathbb{C}^\times \hookrightarrow GL(2, \mathbb{C})$ via $\lambda \mapsto \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^2}$, Ein expliziter derartiger Isomorphismus schickt die Klasse⁸¹ von $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc \neq 0$ auf den Automorphismus

$$g_M : z \mapsto \begin{cases} \infty & \text{falls } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{falls } z = \infty \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.9)$$

(ii) Zu je drei verschiedenen Punkten $z_0, z_1, z_\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ existiert genau ein $f \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ so, dass

$$f(z_0) = 0, \quad f(z_1) = 1, \quad f(z_\infty) = \infty \quad (9.10)$$

Man nennt $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ in der Realisierung (9.9) auch Gruppe der Möbiustransformationen oder gebrochen lineare Transformationen.

⁸¹Vorsicht: Diese 2×2 Matrizen haben trotz der gleichen Buchstaben nichts mit den As aus 1.6 zu tun!

Beweis. Offensichtlich (bzw. wegen Lemma 9.7 (iii)) ist g_M eine holomorphe Abbildung $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Zum Nachweis der Biholomorphie könnten wir im Falle $c \neq 0$ (im Falle $c = 0$ ist g_M affin linear, siehe Lemma 9.5) zur Illustration der Ableitungsregeln auf der Riemannschen Zahlenkugel überprüfen, dass die Ableitung von g_M nirgends verschwindet: Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ ist

$$\frac{dg_M(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad (9.11)$$

da M invertierbar ist. In der Nähe des Pols

$$\frac{dg_M(z)^{-1}}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{cz+d}{az+b} \right) = \frac{cb-da}{(az+b)^2} \quad (9.12)$$

und in der Nähe von ∞

$$\frac{dg_M(1/z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{bz+a}{dz+c} \right) = \frac{bc-ad}{(dz+c)^2} \quad (9.13)$$

Formal richtig überprüft man zunächst das Gruppengesetz $g_{M_1} \circ g_{M_2} = g_{M_1 \cdot M_2}$ und stellt dabei fest, dass $g_M = \text{id}_{\overline{\mathbb{C}}}$ genau dann wenn $b = c = 0$ und $a = d \in \mathbb{C}^\times$. Dies impliziert, dass g_M invertierbar ist, die Abbildung $[M] \mapsto g_M$ wohldefiniert und injektiv, und erlaubt uns ab jetzt formal mit $1/0 = \infty$ zu rechnen.

Die Abbildung

$$z \mapsto g(z) = \frac{(z-z_0)(z_1-z_\infty)}{(z-z_\infty)(z_1-z_0)} =: D(z, z_0, z_1, z_\infty) \quad (9.14)$$

erfüllt die in (9.10) geforderten Bedingungen und liegt offenbar im Bild von $PGL(2, \mathbb{C})$. Es bleibt zu zeigen, dass dies die einzige derartige Abbildung ist, und dass die Abbildung $PGL(2, \mathbb{C}) \ni [M] \mapsto g_M \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ surjektiv ist. Sei hierfür $f \in \text{Aut} \overline{\mathbb{C}}$ beliebig und $M \in GL(2, \mathbb{C})$ so, dass $g_M(f^{-1}(0)) = 0$, $g_M(f^{-1}(1)) = 1$, $g_M(f^{-1}(\infty)) = \infty$. Dann ist $g_M \circ f^{-1}$ ein Automorphismus von $\mathbb{C}$, nach Lemma 9.5 also affin linear der Form $z \mapsto az + b$, und zwar mit $b = 0$, $a = 1$, so dass $f = g_M$. Es liegt also f im Bild von $PGL(2, \mathbb{C})$, und jedes f , was (9.10) erfüllt, muss gleich besagtem g_M sein.

Die Eindeutigkeit von (9.14) im Bild von $PGL(2, \mathbb{C})$ folgt auch direkt aus

$$\begin{aligned} g_M(0) &= \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ g_M(\infty) &= \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0 \\ \Rightarrow g_M(1) &= \frac{a}{d} = 1 \Rightarrow a = d \end{aligned} \quad (9.15)$$

d.h. falls g_M die drei Punkte fixiert, so liegt M bereits im Kern der Abbildung $M \mapsto g_M$. $\square$

Bemerkungen. Der Ausdruck auf der rechten Seite von (9.14) ist bekannt als das *Doppelverhältnis* der vier Punkte (z, z_0, z_1, z_∞) . Es erfüllt⁸²

$$D(g(z), g(z_0), g(z_1), g(z_\infty)) = D(z, z_0, z_1, z_\infty) \quad (9.16)$$

⁸²Per Konstruktion schickt die Abbildung $z \mapsto D(g(z), g(z_0), g(z_\infty))$ die drei Punkte (z_0, z_1, z_∞) auch auf $(0, 1, \infty)$, muss also wegen der Eindeutigkeit gleich $z \mapsto D(z, z_0, z_1, z_\infty)$ sein.

§9. AUTOMORPHISMENGRUPPEN

für alle $g \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ und eine Reihe weiterer bemerkenswerter Eigenschaften (s. Übungen).

Die Cayley-Transformation (9.1), $z \mapsto w = \frac{z-i}{z+i}$ ist die Einschränkung von g_M mit $M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ auf die obere Halbebene, ihr Inverses $w \mapsto z = \frac{w+1}{iw-i}$ die von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ auf die Einheitskreisscheibe, die wir nun im Detail untersuchen.

Einheitskreisscheibe/Obere Halbebene

Der Schlüssel analog zu Lemma 9.5 ist hier das sog. “Schwarzsche Lemma”

Theorem 9.9. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ mit $f(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$.

(i) Für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt $|f(z)| \leq |z|$.

(ii) Es ist $|f'(0)| \leq 1$.

(iii) Aus $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ folgt $f(z) = \frac{f(z_0)}{z_0}z$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

(iv) Aus $|f'(0)| = 1$ folgt $f(z) = f'(0)z$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

In Worten: Eine holomorphe Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe, die den Mittelpunkt fixiert, wirkt “nirgends expansiv” (Aussagen (i) und (ii)). Wirkt sie irgendwo “isometrisch”, so ist f eine Drehung (Aussagen (iii) und (iv)).

Beweis. Wegen $f(0) = 0$ ist die Abbildung $g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases} \quad (9.17)$$

holomorph auf $\mathbb{E}$. (Dies folgt aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz Proposition 7.2 oder alternativ aus der Holomorphie des Differenzenquotienten, die wir in Fussnote 55 festgehalten hatten.) Daher liegt für jedes $0 < r < 1$ das Maximum von $g|_{\overline{B_r(0)}}$ auf dem Rand der kompakten Kreisscheibe (Maximumprinzip, Proposition 5.2), d.h.

$$\max\{|g(z)| \mid |z| \leq r\} = \max\left\{\frac{|f(z)|}{|z|} \mid |z| = r\right\} < \frac{1}{r} \quad (9.18)$$

$\begin{array}{c} \nearrow \leq 1 \\ \downarrow \\ \nwarrow = r \end{array}$

Mit $r \nearrow 1$ folgt $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Dies impliziert sofort (i) und (ii).

Gilt $|g(z_0)| = 1$ für ein $z_0 \in \mathbb{E}$ (d.h. also entweder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$ oder $f'(0) = 1$), so ist wegen $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ z_0 ein lokales Maximum, und deshalb ist nach dem Maximumprinzip g konstant auf $\mathbb{E}$. Dies impliziert (iii) und (iv). $\square$

Korollar 9.10. Jeder Automorphismus der Einheitskreisscheibe, der den Mittelpunkt fixiert, ist eine Drehung.

Beweis. Da auch die Umkehrabbildung den Mittelpunkt fixiert und auch die Ableitungen im Ursprung invers zueinander sind, müssen beide Ableitungen den Betrag 1 haben, so dass wir mit Theorem 9.9 (iv) schliessen können. $\square$

Theorem 9.11. (i) Die Automorphismengruppe der Einheitskreisscheibe ist isomorph zur projektiv unitären Gruppe der Signatur $(1, 1)$, d.h.

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{E}) \cong PU(1, 1) \cong PSU(1, 1) = SU(1, 1)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad (9.19)$$

Ein expliziter Isomorphismus schickt die Klasse von $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ mit $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ auf den Automorphismus

$$h_A(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}} \quad (9.20)$$

(ii) Zu jedem Punkt $\xi \in \mathbb{E}$ existiert genau ein $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{E})$ mit

$$f(\xi) = 0, \quad f'(\xi) > 0 \quad (9.21)$$

(iii) Jeder Automorphismus $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{E})$ setzt sich fort zu einem Homöomorphismus $\bar{f}: \bar{\mathbb{E}} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}$ (der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe).⁸³

Beweis. Wir überprüfen zunächst die Beschreibung von $PSU(1, 1)$. Per Definition ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in U(1, 1)$ genau dann, wenn sie die (indefinite, aber nicht entartete) hermitesche Form $(z_1, z_2) \mapsto |z_1|^2 - |z_2|^2$ auf $\mathbb{C}^2$ erhält, d.h. wenn

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\gamma|^2 & \bar{\alpha}\beta - \bar{\gamma}\delta \\ \bar{\beta}\alpha - \bar{\delta}\gamma & |\beta|^2 - |\delta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.22)$$

Dies erfordert $\alpha \neq 0$, $\beta = \frac{\bar{\gamma}\delta}{\bar{\alpha}}$, und dann

$$|\alpha|^2 - |\gamma|^2 = 1 \text{ sowie } |\beta|^2 - |\delta|^2 = (|\gamma|^2 - |\alpha|^2) \frac{|\delta|^2}{|\alpha|^2} = -1 \quad (9.23)$$

d.h. $\delta = \zeta\alpha$ mit $|\zeta| = 1$. A ist speziell unitär, wenn

$$\det A = \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha\delta - |\gamma|^2 \frac{\delta}{\bar{\alpha}} = \frac{\delta}{\bar{\alpha}} (|\alpha|^2 - |\gamma|^2) = 1 \quad (9.24)$$

d.h. $\delta = \bar{\alpha}$ und dann $\gamma = \bar{\beta}$, wenn also A die angegebene Form hat. Die einzige Diagonalmatrix, die diese Bedingungen erfüllt, ist $-\operatorname{id}_{\mathbb{C}^2}$, was die letzte Gleichheit in (9.19) rechtfertigt.

Dass h_A eine Selbstabbildung von $\mathbb{E}$ ist folgt aus

$$|h_A(z)|^2 = \frac{|\alpha|^2|z|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha z \bar{\beta})}{|\beta|^2|z|^2 + |\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\beta} z \alpha)} \quad (9.25)$$

und $|\alpha|^2|z|^2 + |\beta|^2 < |\beta|^2|z|^2 + |\alpha|^2$ falls $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ und $|z|^2 < 1$, die Invertierbarkeit aus dem Gruppengesetz $h_{A_1} \circ h_{A_2} = h_{A_1 \cdot A_2}$. (h_A ist ja auch nichts als die Einschränkung einer gebrochen linearen Transformation (9.9) auf $\mathbb{E}$.) Der Kern von $A \mapsto h_A$ ist genau $-\operatorname{id}_{\mathbb{C}^2}$, für $\beta = 0$, $\alpha = e^{i\varphi/2}$ ist h_A die Drehung um den Winkel φ .

⁸³Es muss hier leider der Balken mal die komplexe Konjugation, mal den topologischen Abschluss bezeichnen.

§9. AUTOMORPHISMENGRUPPEN

Für alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\xi| \neq 1$ erfüllt die Abbildung (vgl. H1.1)

$$h_\xi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h_\xi(z) := \frac{z - \xi}{-\bar{\xi}z + 1} \quad (9.26)$$

$h_\xi(\xi) = 0$, $h_\xi(0) = -\xi$, und

$$h'_\xi(z) = \frac{1 - |\xi|^2}{(-\bar{\xi}z + 1)^2} = (1 - |\xi|^2)^{-1} \text{ falls } z = \xi \quad (9.27)$$

Wegen

$$|h_\xi(z)|^2 = \frac{|z|^2 + |\xi|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{\xi})}{|\xi|^2|z|^2 + 1 - 2\operatorname{Re}(\bar{\xi}z)} \quad (9.28)$$

und $|\xi|^2|z|^2 + 1 - |\xi|^2 - |z|^2 = (1 - |\xi|^2)(1 - |z|^2)$ folgt aus $|\xi| < 1$ dass $|h_\xi(z)| < 1$ falls $|z| < 1$. Ausserdem ist $h_{-\xi} \circ h_\xi = \operatorname{id}_{\mathbb{C}}$, so dass h_ξ die in (9.21) geforderten Bedingungen erfüllt, und $h_\xi = h_A$ für $A \in SU(1, 1)$ mit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}$, $\beta = -\frac{\xi}{\sqrt{1-|\xi|^2}}$.⁸⁴ Es bleibt zu zeigen, dass dies die einzige derartige Abbildung ist und dass die Abbildung $PSU(1, 1) \rightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{E})$ surjektiv ist. Sie hierfür $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{E})$ beliebig und $A \in SU(1, 1)$ so, dass $h_A(f^{-1}(0)) = 0$ und $h'_A(f^{-1}(0)) > 0$. Dann ist $h_A \circ f^{-1}$ ein Automorphismus von $\mathbb{E}$ der den Ursprung fixiert, gemäss Korollar 9.10 also eine Drehung. Da diese im Bild von $PSU(1, 1)$ liegt, gilt dies dann auch für f . Erfüllt f (9.21), so ist auch $(f^{-1})'(0) > 0$, die Drehung trivial, und f muss gleich besagtem h_A sein. Damit sind (i) und (ii) bewiesen. (iii) ist offensichtlich. $\square$

Mit Hilfe der Cayley-Transformation (9.1) lassen sich diese Ergebnisse auf die Automorphismen der oberen Halbebene übertragen.

Korollar 9.12. (i) Die Automorphismengruppe der oberen Halbebene ist isomorph zur projektiv linearen Gruppe des $\mathbb{R}^2$, d.h.

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) \cong PGL(2, \mathbb{R}) = GL(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}^\times \quad (9.29)$$

wo $\mathbb{R}^\times \hookrightarrow GL(2, \mathbb{R})$ via $\lambda \mapsto \lambda \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}$. Ein expliziter Isomorphismus schickt die Klasse von $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc \neq 0$ auf den Automorphismus⁸⁵

$$g_M(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad (9.30)$$

(ii) Jeder Automorphismus $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ setzt sich fort zu einem Homöomorphismus $\bar{f} : \bar{\mathbb{H}} \rightarrow \bar{\mathbb{H}}$, wobei $\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \bar{\mathbb{C}}$ den Abschluss von $\mathbb{H}$ in der Riemannschen Zahlenkugel bezeichnet.

(iii) Zu je drei verschiedenen Punkten $(x_0, x_1, x_\infty) \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$ existiert genau ein $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ so, dass

$$\bar{f}(x_0) = 0, \quad \bar{f}(x_1) = 1, \quad \bar{f}(x_\infty) = \infty \quad (9.31)$$

⁸⁴Diese Überlegungen zeigen auch, dass h_ξ im Falle $|\xi| > 1$ eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{E}$ ist.

⁸⁵Da M reelle Einträge hat ist dies wohldefiniert für alle z mit $\operatorname{Im}(z) > 0$.

Beweis. f ist Automorphismus von $\mathbb{E}$ genau dann wenn $\text{Cay}^{-1} \circ f \circ \text{Cay}$ Automorphismus von $\mathbb{H}$ ist. Mit Hilfe der Matrizen auf S. 81 dargestellt und in $PGL(2, \mathbb{C})$ gerechnet finden wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \bar{\beta} + \bar{\alpha} & -i\alpha + i\beta - i\bar{\beta} + i\bar{\alpha} \\ i\alpha + i\beta - i\bar{\beta} - i\bar{\alpha} & \alpha - \beta - \bar{\beta} + \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (9.32)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a = \text{Re } \alpha + \text{Re } \beta$, $b = \text{Im } \alpha - \text{Im } \beta$, $c = -\text{Im } \alpha - \text{Im } \beta$, $d = \text{Re } \alpha - \text{Re } \beta$. Daraus folgt bereits (i). Die Automorphismen von $\mathbb{H}$ sind also auch genau die Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$, die die reelle Achse auf die reelle Achse abbilden. Sie setzen sich also trivialerweise auf $\overline{\mathbb{H}}$ fort und wirken auf $\overline{\mathbb{R}}$ wie

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \quad (9.33)$$

Damit folgt (ii), und (iii) aus Theorem 9.8 (ii). $\square$

Die folgenden zwei Aussagen können in der Vorlesung übergangen werden. Die erste beschreibt alle biholomorphen Abbildungen zwischen $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$, in Verallgemeinerung der Cayley-Transformation (9.1). Die zweite überträgt das Schwarzsche Lemma 9.9 auf eine Maximalitätseigenschaft der Automorphismen der Einheitskreisscheibe innerhalb der Selbstabbildungen.

Korollar 9.13. *Sei $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$ biholomorph. Dann existiert genau eine Zahl $\alpha \in \mathbb{H}$ und eine Phase $e^{i\varphi}$ so dass für alle $z \in \mathbb{H}$*

$$w = f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \quad (9.34)$$

Die Umkehrabbildung lautet

$$z = f^{-1}(w) = \frac{\alpha - \bar{\alpha} e^{-i\varphi} w}{1 - e^{-i\varphi} w} \quad (9.35)$$

f setzt sich fort zu einem Homöomorphismus $\bar{f} : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \overline{\mathbb{E}}$.

Beweis. Offenbar ist $f \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ und $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow z \in \overline{\mathbb{R}}$. Wegen $f(\alpha) = 0$ muss damit $f(\mathbb{H}) = \mathbb{E}$ sein. Die Eindeutigkeit bis auf die Drehung folgt aus Theorem 9.11 (ii) bzw. Korollar 9.10. $\square$

Proposition 9.14. (i) Für alle $f \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ gilt

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E} \quad (9.36)$$

(ii) Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ mit $f(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ so gilt entweder

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} < \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E} \quad (9.37)$$

oder es ist $f \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ (und dann gilt (9.36)).

§ 10. DER RIEMANNSCHE ABBILDUNGSSATZ

Beweis. (i) Wir rechnen in der Darstellung (9.20) unter Beachtung von $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ mit Hilfe von (9.11):

$$\frac{|h'_A(z)|}{1 - |h_A(z)|^2} = \frac{1}{|\bar{\beta}z + \bar{\alpha}|^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|\alpha z + \beta|^2}{|\bar{\beta}z + \bar{\alpha}|^2}} = \frac{1}{|\bar{\beta}z + \bar{\alpha}|^2 - |\alpha z + \beta|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2} \quad (9.38)$$

und finden genau die Behauptung.

(ii) Gemäss Theorem 9.11 (iii) existieren für jedes $z \in \mathbb{E}$ $h_{-z}, h_{f(z)} \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ mit $h_{-z}(0) = z$ und $h_{f(z)}(f(z)) = 0$ (solche stehen explizit in (9.26)). Dann ist die Komposition $f_z := h_{f(z)} \circ f \circ h_{-z} \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$ und erfüllt $f_z(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ und $f_z(0) = 0$, nach dem Schwarzschen Lemma 9.9 also $|f'_z(0)| \leq 1$. Andererseits gilt wegen der Kettenregel und (9.36)

$$\begin{aligned} |f'_z(0)| &= |h'_{f(z)}(f(z))| \cdot |f'(z)| \cdot |h'_{-z}(0)| \\ &= |f'(z)| \cdot \frac{1 - |h_{f(z)}(f(z))|^2}{1 - |f(z)|^2} \cdot \frac{1 - |h_{-z}(0)|^2}{1 - 0} \\ &= |f'(z)| \cdot \frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2} \end{aligned} \quad (9.39)$$

Es ist also $|f'(z)|(1 - |z|^2) \leq 1 - |f(z)|^2$ für alle $z \in \mathbb{E}$, und sobald für irgendein z nicht mehr die strikte Ungleichung gilt, ist f_z eine Drehung, und daher $f = h_{f(z)}^{-1} \circ f_z \circ h_{-z}^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{E})$. Dies war die Behauptung. $\square$

§ 10 Der Riemannsche Abbildungssatz

Wir sind nun motiviert und in der Lage, das folgende zentrale Resultat der Funktionentheorie zu schätzen und zu beweisen...

Theorem 10.1 (Der (kleine) Riemannsche Abbildungssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein von $\mathbb{C}$ verschiedenes Gebiet mit der Eigenschaft, dass jede holomorphe Funktion auf D eine holomorphe Stammfunktion besitzt.⁸⁶ Dann existiert für jedes $z_0 \in D$ eine eindeutige biholomorphe Abbildung $f_{z_0} : D \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f_{z_0}(z_0) = 0$ und $f'_{z_0}(z) > 0$. Insbesondere ist D biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe.*

...und damit auf einen Schlag all unsere Fragen zu erledigen.

Korollar 10.2. *Für jedes Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

- (i) D ist einfach zusammenhängend.
- (ii) Jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ besitzt eine bis auf eine additive Konstante eindeutige holomorphe Stammfunktion.
- (iii) D ist biholomorph äquivalent zu $\mathbb{E}$ oder $\mathbb{C}$.
- (iv) D ist homöomorph zu $\mathbb{E}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist Theorem 6.8. (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt aus Theorem 10.1. (iii) $\Rightarrow$ (iv) folgt aus der Tatsache, dass biholomorphe Gebiete auch homöomorph sind (s. Lemma

⁸⁶Im Klartext: D ist ein von der komplexen Ebene verschiedenes Elementargebiet.

9.2) und der Existenz des Homöomorphismus $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{z}{1+|z|} \in \mathbb{E}$ (s. Fussnote 75). (iv) $\Rightarrow$ (i) folgt aus der Tatsache, dass Homotopie von Wegen (insbesondere Null-Homotopie) invariant unter Homöomorphismen ist (s. Aufgabe P7.1). $\square$

Korollar 10.3. *Es gibt bis auf biholomorphe Äquivalenz genau zwei einfach zusammenhängende Gebiete, $\mathbb{E}$ und $\mathbb{C}$. Für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $D \neq \mathbb{C}$ ist $\text{Aut}(D) \cong \text{PSU}(1,1)$.*

Beweis. Jetzt klar. Man unterschätze nicht, dass biholomorphe Äquivalenz nicht sehr, aber doch ein klein wenig schwächer ist als topologische Äquivalenz. $\square$

Beweisstrategie

Die Eindeutigkeitsaussage des Riemannschen Abbildungssatzes folgt offenbar aus Theorem 9.11 (ii). Für den Beweis der Existenzaussage betrachten wir die Menge

$$\mathcal{K} := \{f \in \mathcal{O}(D) \mid f(D) \subset \mathbb{E} \text{ und } f \text{ ist injektiv}\} \quad (10.1)$$

und konstruieren die gesuchte Abbildung innerhalb von $\mathcal{K}$ durch *Maximieren der Ableitung in z_0* . Wir setzen für jedes $z_0 \in D$:⁸⁷

$$M(z_0) := \sup\{|f'(z_0)| \mid f \in \mathcal{K}\} \quad (10.2)$$

und zeigen:

- I. Für jedes $z_0 \in D$ existiert ein $f \in \mathcal{K}$ mit $f(z_0) = 0$.⁸⁸
- II. Ist $f \in \mathcal{K}$ so, dass $f(D) \subsetneq \mathbb{E}$, so gilt für alle $z_0 \in D$, dass $|f'(z_0)| < M(z_0)$.
- III. Für alle $z_0 \in D$ existiert eine Funktion $f_{z_0} \in \mathcal{K}$ mit $f'_{z_0}(z_0) = M(z_0)$.
- IV. Diese Funktion erfüllt $f_{z_0}(z_0) = 0$. Da wegen II ihr Bild ganz $\mathbb{E}$ ist, und sie dann wegen Proposition 9.2 (iii) biholomorph ist, erfüllt sie so alle Bedingungen aus Theorem 10.1, und das Problem ist gelöst.

Die Beweise (von I und II) verwenden die Voraussetzung nur in der Form: *Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion auf D besitzt eine holomorphe Quadratwurzel*. Der Beweis dieser Aussage, den wir für einfach zusammenhängende Gebiete in Theorem 6.9 gegeben hatten, geht unter der genannten Voraussetzung genauso.⁸⁹ Für II benutzen wir ausserdem einige quantitativen Ergebnisse zu $\text{Aut}(\mathbb{E})$ aus § 9. Der Nachweis von III, dass nämlich das Supremum in (10.2) tatsächlich angenommen wird, beruht auf einem zentralen Kompaktheitsargument, für das wir wiederum die feinen Konvergenzaussagen zu holomorphen Funktionenfolgen aus § 5 und § 8 benutzen.

⁸⁷A priori ist $M(z_0) \in [0, \infty]$. Wegen I ist die Menge aber nicht leer und aus den Cauchy-Formeln (4.26) folgt durch Standardabschätzung sofort, dass die Ableitungen durch $1/\epsilon$ beschränkt sind, wo $\epsilon > 0$ so, dass $\bar{B}_\epsilon(z_0) \subset D$. Daher ist $M(z_0)$ eine positive reelle Zahl.

⁸⁸Dieser sanity check ist nötig, da der Beweis von III nicht konstruktiv ist. Sein eigener Beweis ist aber auch sonst nicht uninteressant.

⁸⁹Wir zeigen damit aber insbesondere, dass die Existenz holomorpher Quadratwurzeln auch hinreichend ist für den einfachen Zusammenhang.

§ 10. DER RIEMANNSCHE ABBILDUNGSSATZ

Beweis von I. Da $D \neq \mathbb{C}$ existiert ein $w_0 \in \mathbb{C} \setminus D$. Die Funktion $z \mapsto z - w_0$ ist dann holomorph und nullstellenfrei auf D und besitzt nach dem gerade Bemerkten eine holomorphe Quadratwurzel $s \in \mathcal{O}(D)$, so dass also

$$\forall z \in D : s(z)^2 + w_0 = z \quad (10.3)$$

s besitzt also eine Linksinverse und ist damit injektiv. Ausserdem gilt für alle $w \in s(D)$, dass $w \neq 0$ und $-w \notin s(D)$ (sonst hätten $w \neq -w$ nach (10.3) ja doch das gleiche Urbild, was absurd ist). Da $s(D)$ nach dem Satz über die Gebietstreue 5.4 offen ist, existieren $w_1 \in s(D)$ und $r > 0$ so, dass $B_r(w_1) \subset s(D)$. Nach dem eben Gesagten ist dann aber $(-B_r(w_1)) \cap s(D) = \emptyset$, so dass $|s(z) + w_1| > r$ für alle $z \in D$. Die Abbildung

$$D \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{s(z) + w_1} \quad (10.4)$$

ist dann (offensichtlich holomorph, injektiv und) beschränkt (durch $\frac{1}{r}$). Durch Nach-Verknüpfung mit einer Translation und anschliessenden Streckung erhalten wir eine injektive Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ mit $f(z_0) = 0$ und $f(D) \subset \mathbb{E}$, wie gefordert.⁹⁰ Wir bemerken, dass nach Proposition 9.2 (iii) $f(D)$ biholomorph zu D ist. $\square$

Beweis von II. Angenommen, $f : D \rightarrow \mathbb{E}$ ist holomorph und injektiv, aber es existiert ein $\xi \in \mathbb{E} \setminus f(D)$. Ist dann gemäss Theorem 9.11, (9.26) $h_\xi \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ so, dass $h_\xi(\xi) = 0$, so hat die Funktion $h_\xi \circ f$ keine Nullstelle auf D , besitzt also nach Voraussetzung eine holomorphe Quadratwurzel, die wir wieder s nennen und die auch D injektiv auf $\mathbb{E}$ abbildet. Ist dann $z_0 \in D$ gegeben so existiert nach dem gleichen Satz $h_{s(z_0)} \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ so, dass $h_{s(z_0)}(s(z_0)) = 0$ und die Funktion $f_\xi := h_{s(z_0)} \circ s$ ist auch wieder in $\mathcal{K}$ und erfüllt ausserdem $f_\xi(z_0) = 0$. Per Konstruktion gilt:

$$f = \underbrace{h_\xi^{-1} \circ Q \circ h_{s(z_0)}^{-1}}_{=: Q_{\xi, f, z_0}} \circ f_\xi \quad (10.5)$$

wo $Q : z \mapsto z^2$ unser alter Freund die Quadratabbildung ist, aufgefasst als Selbstabbildung von $\mathbb{E}$. Da Q auf $\mathbb{E}$ nicht injektiv ist, gilt dies auch für Q_{ξ, f, z_0} , so dass nach dem Schwarzschen Lemma 9.9 $|Q'_{\xi, f, z_0}(0)| < 1$.⁹¹ Es folgt

$$|f'(z_0)| = |Q'_{\xi, f, z_0}(0)| \cdot |f'_\xi(z_0)| < |f'_\xi(z_0)| \leq M(z_0) \quad (10.7)$$

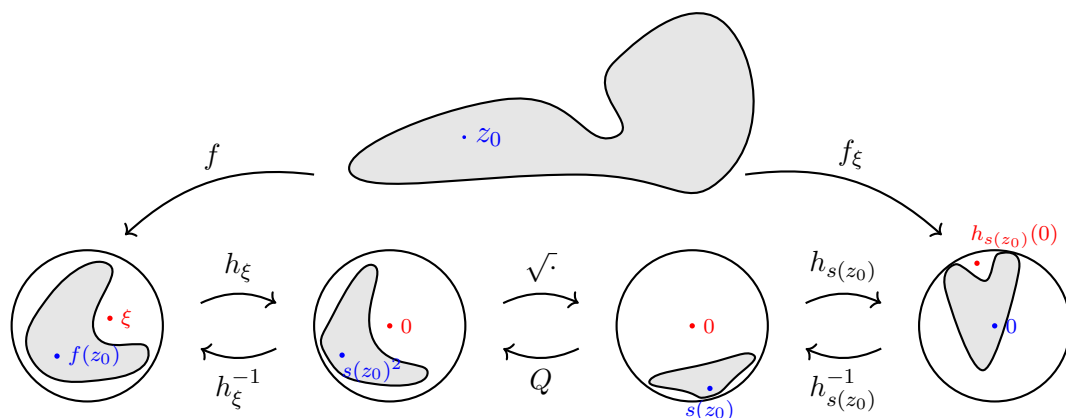
per Definition (10.2).

⁹⁰Nicht so faul! $f(z) = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{s(z) + w_1} - \frac{1}{s(z_0) + w_1} \right)$.

⁹¹Schon wieder!! h_ξ und $h_{s(z_0)}$ sind doch in $\text{Aut}(\mathbb{E})$, so dass wir mit Hilfe von Proposition 9.14 rechnen können:

$$\begin{aligned} |Q'_{\xi, f, z_0}(0)| &= \frac{\overbrace{|(h_\xi^{-1})'(s(z_0)^2)|}^{|Q'(s(z_0))|}}{\frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |s(z_0)|^4}} \cdot \overbrace{|Q'(s(z_0))|}^{|Q'(s(z_0))|} \cdot \overbrace{|(h_{s(z_0)}^{-1})'(0)|}^{|(h_{s(z_0)}^{-1})'(0)|} \\ &= (1 - |f(z_0)|^2) \cdot \frac{2|s(z_0)|}{1 + |s(z_0)|^2} \leq \frac{2|s(z_0)|}{1 + |s(z_0)|^2} < 1 \end{aligned} \quad (10.6)$$

wegen $1 + |s(z_0)|^2 - 2|s(z_0)| = (1 - |s(z_0)|)^2 > 0$.



□

Zum Beweis von III wollen wir ausgehend von einer Folge $(f_n) \subset \mathcal{K}$, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(z_0)| = M(z_0)$, durch Übergang zu einer Teilfolge eine Folge (f_{n_k}) konstruieren, die auf ganz D konvergiert, und deren Grenzfunktion in $\mathcal{K}$ liegt. Der Schlüssel hierfür ist das folgende funktionentheoretische Analogon des Satzes von Bolzano-Weierstrass.

Theorem 10.4 (Satz von Montel). *Jede lokal gleichmässig beschränkte Folge $(f_n) \subset \mathcal{O}(U)$ holomorpher Funktionen auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ besitzt eine lokal gleichmässig konvergente Teilfolge.*

Definition 10.5. Eine Familie⁹² $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ holomorpher Funktionen auf einer offenen Menge U heisst

- (i) auf einer Teilmenge $A \subset U$ *gleichmässig beschränkt*, falls eine Schranke $M \in \mathbb{R}$ existiert so, dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in A$ und alle $f \in \mathcal{F}$.
- (ii) *lokal gleichmässig beschränkt*, falls für alle $z_0 \in U$ eine Umgebung von z_0 in U existiert, auf der $\mathcal{F}$ gleichmässig beschränkt ist.
- (iii) auf einer Teilmenge $A \subset U$ *gleichgradig stetig*, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so dass für alle $f \in \mathcal{F}$

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon \text{ für alle } z_1, z_2 \in A \text{ mit } |z_1 - z_2| < \delta \quad (10.8)$$

- (iv) *lokal gleichgradig stetig*, falls für alle $z_0 \in U$ eine Umgebung von z_0 in U existiert, auf der $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist.

Man beachte, dass hier die Adjektive “gleichmässig”/“gleichgradig” die Unabhängigkeit der Schranken (M bzw. δ) auch von der Funktion verlangen. Die Folgerung von Theorem 10.4 bezieht sich weiter nur auf die Stellen im Definitionsbereich. Das adjektiv “lokal” kann man in der üblichen Weise äquivalent durch die Klausel “auf Kompakta” ersetzen. Insbesondere:

Lemma 10.6. *$\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ ist genau dann lokal gleichgradig stetig, wenn $\mathcal{F}$ auf jeder kompakten Menge $K \subset U$ gleichgradig stetig ist.*

⁹²zum Beispiel, eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

§ 10. DER RIEMANNSCHE ABBILDUNGSSATZ

Beweis. “ $\Rightarrow$ ”: Für alle $z_0 \in U$ existiert ein $r > 0$ so, dass $\overline{B}_r(z_0) \subset U$. Auf dieser kompakten Umgebung ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig, also insbesondere auch auf der offenen Umgebung $B_r(z_0) \subset U$.

“ $\Leftarrow$ ”: Angenommen, $\mathcal{F}$ ist lokal gleichgradig stetig, und $K \subset U$ ist kompakt. Dann existiert für alle $w \in K$ ein $r_w > 0$ so, dass $B_{2r_w}(w) \subset U$ und $\mathcal{F}$ auf $B_{2r_w}(w)$ gleichgradig stetig ist. Die $\{B_{r_w}(w) \mid w \in K\}$ überdecken K , sei $\{B_{r_i}(w_i) \mid i = 1, \dots, N\}$ eine endliche Teilüberdeckung. Für gegebenes $\epsilon > 0$ und jedes $i = 1, \dots, N$ sei dann $\delta_i > 0$ so wie in (10.8) bzgl. $A = B_{2r_i}(w_i)$, und setze $\delta = \min\{\delta_i, r_i\} > 0$. Sind dann $z_1, z_2 \in K$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$, so existiert ein i so dass $z_1 \in B_{r_i}(w_i)$. Wegen $|z_1 - z_2| < r_i$ folgt dass noch $z_2 \in B_{2r_i}(w_i)$ und daher wegen $|z_1 - z_2| < \delta_i$, dass $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ ist also auf K gleichgradig stetig. $\square$

Vor allem aber gilt:

Lemma 10.7. *Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ lokal gleichmässig beschränkt, so ist $\mathcal{F}$ bereits lokal gleichgradig stetig.*

Beweis. Sei $z_0 \in U$ und $r > 0$, $M \in \mathbb{R}$ so, dass $\overline{B}_{2r}(z_0) \subset U$ und $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \overline{B}_{2r}(z_0)$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Dann gilt für alle $z_1, z_2 \in B_r(z_0)$ wegen der Cauchy-Integralformel und der Standardabschätzung des Integrals für alle $f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2r}^+(z_0)} \left(\frac{f(w)}{w - z_1} - \frac{f(w)}{w - z_2} \right) dw \right| \\ &\leq 2r \cdot \max \left\{ |f(w)| \cdot \frac{|z_1 - z_2|}{|w - z_1| \cdot |w - z_2|} \mid w \in C_{2r}(z_0) \right\} \quad (10.9) \\ &\leq 2r \cdot \frac{M}{r^2} \cdot |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

da $|w - z_1|, |w - z_2| > r$ für alle $w \in C_{2r}(z_0)$. Für gegebenes $\epsilon > 0$ erfüllt also $\delta = \frac{r}{2M}\epsilon$ die geforderte Bedingung. $\square$

Beweis von Theorem 10.4. Wir konstruieren zunächst eine Teilfolge mit Hilfe eines Diagonalisierungsarguments und zeigen dann die lokal gleichmässige Konvergenz mit Hilfe der gleichgradigen Stetigkeit (Lemma 10.7).⁹³

Konstruktion der Teilfolge: Sei S eine abzählbare dichte Teilmenge von U (z.B., $S = U \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$, der Menge der Punkte mit rationalem Real- und Imaginärteil.), und $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von S . Da $(f_n(w_1))$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine Teilfolge $(f_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (f_n) so dass $(f_{1,k}(w_1))$ konvergiert. Sodann existiert eine Teilfolge $(f_{2,k})$ von $(f_{1,k})$, welche in w_2 konvergiert, eine Teilfolge $(f_{3,k})$ von $(f_{2,k})$, welche in w_3 konvergiert, etc. Die “Diagonalfolge” $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $g_k = f_{k,k}$ ist dann für jedes i ab $k \geq i$ eine Teilfolge von $(f_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ und konvergiert daher an jeder Stelle w_i , $i = 1, 2, \dots$

Lokal gleichmässige Konvergenz: Sei $z_0 \in U$, und $K \subset U$ eine kompakte Umgebung von z_0 auf der (f_n) , und damit auch (g_k) , gemäss Lemma 10.7 und Lemma 10.6 gleichgradig stetig ist. Für gegebenes $\epsilon > 0$ existiert dann $\delta > 0$ so, dass $|g_k(z_1) - g_k(z_2)| < \epsilon$ für alle $z_1, z_2 \in K$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$, und alle k . Wegen der Dichtheit von

⁹³Dies ist im Wesentlichen eine Version des Satzes von Arzelà-Ascoli.

$S \cap K$ und der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilmenge $\{s_i\} \subset S \cap K$ so dass $K \subset \cup_i B_\delta(s_i)$. Wegen der Konvergenz von $(g_k(s_i))$ für alle (endliche viele) i existiert ein L so, dass $|g_k(s_i) - g_l(s_i)| < \epsilon$ für alle $k, l \geq L$ und alle i . Nun existiert für alle $z \in K$ ein i so dass $|z - s_i| < \delta$ und es folgt

$$|g_k(z) - g_l(z)| \leq |g_k(z) - g_k(s_i)| + |g_k(s_i) - g_l(s_i)| + |g_l(s_i) - g_l(z)| < 3\epsilon \quad (10.10)$$

für alle $k, l \geq L$. Dies besagt, dass (g_k) eine auf K gleichmässige Cauchy-Folge ist. Daraus folgt die lokal gleichmässige Konvergenz. $\square$

Nun kehren wir zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes auf S. 86 zurück.

Beweis von III. Per Def. (10.2) existiert eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{K}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(z_0)| = M(z_0)$. Durch ggfs. Nach-Komposition einer jeden f_n mit einer Rotation können wir erreichen, dass $f'_n(z_0) > 0$ für alle n und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z_0) = M(z_0)$. Da $\mathcal{K}$ (nicht nur lokal sondern tatsächlich) auf ganz D gleichmässig beschränkt ist (es gilt nämlich $|f(z)| < 1$ für alle $f \in \mathcal{K}$ und alle $z \in D$), können wir nach Theorem 10.4 durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen, dass (f_n) lokal gleichmässig konvergiert. Wir behaupten, dass die punktweise gebildete Grenzfunktion

$$f_{z_0}(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \quad (10.11)$$

in $\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{O}(D) \mid f(D) \subset \mathbb{E} \text{ und } f \text{ ist injektiv}\}$ liegt.

(α) Zunächst einmal impliziert $f_n(D) \subset \mathbb{E}$ für alle n dass $|f_{z_0}(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$.
 (β) Wegen Thm. 5.5 ist f_{z_0} holomorph und es gilt $f'_{z_0}(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z_0) = M(z_0)$.
 (γ) Da $M(z_0)$ insbesondere nicht null ist, ist f_{z_0} nicht lokal konstant auf D , und da die (f_n) alle injektiv sind, impliziert der Satz von Hurwitz 8.5, dass auch f_{z_0} injektiv ist. Ausserdem ist nach dem Satz über die Gebietstreue 5.4 $f(D)$ offen und muss daher in $\mathbb{E}$ liegen.

Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Beweis von IV. Wie auf S. 86 antizipiert, ist $f_{z_0} : D \rightarrow \mathbb{E}$ wegen II surjektiv und damit eine biholomorphe Abbildung. Wäre $\xi := f_{z_0}(z_0) \neq 0$, so wäre mit h_ξ aus Theorem 9.11 (9.26) auch $h_\xi \circ f_{z_0} \in \mathcal{K}$ mit

$$(h_\xi \circ f_{z_0})'(z_0) = \frac{1}{1 - |\xi|^2} \cdot M(z_0) > M(z_0) \quad (10.12)$$

im Widerspruch zu (10.2). $\square$

Damit ist der Riemannsche Abbildungssatz 10.1 vollständig bewiesen. Falls wir Proposition 9.14 nicht übergangen haben, können wir auch noch die folgende zusätzliche Verschärfung zeigen.

Proposition 10.8. *Für alle $f \in \mathcal{O}(D)$ mit $f(D) \subset \mathbb{E}$ (injektiv oder nicht) gilt $|f'(z)| \leq M(z)$ für alle $z \in D$. Gilt Gleichheit für ein $z_0 \in D$, so ist f bis auf eine Drehung gleich f_{z_0} aus Theorem 10.1.*

§ 11. ERGÄNZUNGEN UND BEISPIEL

Beweis. Für jedes $z_0 \in D$ ist $g = f \circ f_{z_0}^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine holomorphe Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe. Wegen $g(0) = f(z_0)$ und Proposition 9.14 gilt daher

$$|g'(0)| = |f'(z_0)| \cdot \frac{1}{M(z_0)} \leq 1 - |f(z_0)|^2 \leq 1 \quad (10.13)$$

Dies zeigt die erste Behauptung. Ist weiter $|f'(z_0)| = M(z_0)$ für ein $z_0 \in D$, so folgt $f(z_0) = 0 = g(0)$ sowie $|g'(0)| = 1$, d.h. g ist eine Drehung. $\square$

Es ist nun auch gezeigt, dass ein Gebiet D (genau dann) einfach zusammenhängend ist, wenn das Innere eines jeden Wegs $\gamma \subset D$ ganz in D enthalten ist, da gemäss Proposition 6.14 dann jede holomorphe Funktion auf D eine Stammfunktion besitzt. (Die Rückrichtung war Korollar 6.15.) Abschliessend sollte auch ohne vollständigen Beweis die folgende anschauliche Charakterisierung des einfachen Zusammenhangs nicht unerwähnt bleiben.

Proposition 10.9. *Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

- (i) D ist einfach zusammenhängend.
- (ii) Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus D$ sind alle unbeschränkt.
- (iii) Das Komplement von D in den erweiterten komplexen Zahlen ist zusammenhängend.

Beweisskizze. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist eine Übungsaufgabe der mengentheoretischen Topologie: Sind in der Zerlegung $\mathbb{C} \setminus D = \bigcup_{i \in I} A_i$ alle Zusammenhangskomponenten unbeschränkt, so ist für alle i auch $\overline{A_i} = A_i \cup \{\infty\}$ noch zusammenhängend. Dann aber ist $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \neq \emptyset$ und daher ist $\bigcup_i \overline{A_i} = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ zusammenhängend (siehe Fussnote 13). Ist andererseits eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus D$, sagen wir A_0 , beschränkt, so existiert eine (nicht-leere) beschränkte offene Menge $U_0 \subset \mathbb{C}$ so dass $U_0 \cap (\mathbb{C} \setminus D) = A_0$, eine davon disjunkte (wenn auch möglicherweise leere) offene Menge $U_1 \subset \mathbb{C}$ so dass $U_1 \cap (\mathbb{C} \setminus D) = \bigcup_{i \neq 0} A_i$ sowie eine von U_0 disjunkte offene Umgebung V von $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$. Dann ist $U_0 \cup (U_1 \cup V)$ eine Überdeckung von $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ durch zwei disjunkte nicht-leere offene Mengen, d.h. $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ ist nicht zusammenhängend.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ist $\gamma \subset D$ ein geschlossener Weg, so ist $\gamma \subset \overline{B_R(0)}$ für $R > 0$ gross genug, während andererseits $(\mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(0)}) \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $\rho > R$ und alle Zusammenhangskomponenten A_i des Komplements von D . Es folgt wie in Lemma 6.11, dass $W(\gamma, A_i) = \{0\}$ für alle i und daher $\mathbb{C} \setminus D \subset \text{Ext}(\gamma)$. Dies impliziert via Theorem 10.1, dass D einfach zusammenhängend ist.

Der Beweis, dass D nicht einfach zusammenhängend ist, falls $\mathbb{C} \setminus D$ eine beschränkte (d.h. also, kompakte) Zusammenhangskomponente hat (anschaulich klar) scheint schwieriger und wird nachgeliefert. $\square$

§ 11 Ergänzungen und Beispiel

Bemerkungen. Im Sinne unserer Ausgangsfrage auf S. 75 lässt sich die Umkehrung einer Riemannschen Abbildung $F := f^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow D$ auch als “holomorphe Parametrisierung” eines beliebigen einfach zusammenhängenden Gebiets $D \subsetneq \mathbb{C}$ durch

die Einheitskreisscheibe interpretieren. Hierbei garantiert die Cauchy-Integralformel (genauer gesagt, die im Theorem 4.7 festgehaltene fundamentale Analytizität holomorpher Funktionen), dass jede solche Parametrisierung durch eine auf ganz $\mathbb{E}$ konvergente Potenzreihe dargestellt wird, deren abgeleitete Reihe auf $\mathbb{E}$ nullstellenfrei ist. Dies zeigt, dass das Beispiel 9.3 (iv) eigentlich alles erfasst, unterstreicht aber auch die Komplexität der Beschreibung “aller” einfach zusammenhängenden Gebiete. Es bleibt die Frage nach der expliziten Lösung des “Parametrisierungsproblems” in Spezialfällen.

· Für viele Anwendungen ist es von Interesse, inwiefern sich solche biholomorphen Abbildungen $F = f^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow D$ “auf den Rand fortsetzen lassen”, d.h. genauer ob es einen Homöomorphismus $\bar{F} = \bar{f}^{-1} : \bar{\mathbb{E}} \rightarrow \bar{D}$ gibt so dass $\bar{F}|_{\mathbb{E}} = F$. Dies spielt z.B. eine Rolle für die Lösung des “Dirichlet-Problems” mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes (bzw. umgekehrt für die Konstruktion biholomorpher Abbildungen mittels harmonischer Analysis). Die Lösung dieses “Fortsetzungsproblems” hängt stark von den Regularitätseigenschaften des Randes $\partial D = \bar{D} \setminus D$ ab. Wir zitieren paradigmatisch den

Theorem 11.1 (Satz von Carathéodory). *Sei $D \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Jede (äquivalent: eine) biholomorphe Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{E}$ lässt sich zu einem Homöomorphismus $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}$ fortsetzen.*
- (ii) *Der Rand $\partial D = \bar{D} \setminus D$ ist (Spur) eine(r) Jordankurve und D die beschränkte Komponente ihres Komplements (siehe Theorem 6.16).*

Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist eine einfache Übungsaufgabe. Die Umkehrung wird zu gegebener Zeit nachgeliefert. Hier zwei einfache Vorüberlegungen:

Lemma 11.2. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und beschränkt, $f : D \rightarrow \mathbb{E}$ biholomorph, und $(b_n) \subset D$ eine Folge, welche gegen einen Randpunkt $b \in \partial D$ konvergiert. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(b_n)| = 1$.*

Beweis. Gäbe es ein $r < 1$ mit $|f(b_n)| \leq r$ für unendlich viele n , so gäbe es nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass eine Teilfolge (b_{n_k}) für die $(f(b_{n_k}))$ gegen einen Punkt in $\bar{B}_r(0) \subset \mathbb{E}$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f^{-1} müsste dann aber (b_{n_k}) gegen einen Punkt im Inneren von D konvergieren. $\nexists$ □

Lemma 11.3. (i) *Angenommen, für jede Folge $(b_n) \subset D$ mit $\lim b_n \in \partial D$ existiert $\lim f(b_n)$. Dann besitzt f eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}$.*
 (ii) *Existiert ausserdem für jede Folge $(c_n) \subset \mathbb{E}$ mit $\lim c_n \in \partial \mathbb{E}$ auch $\lim f^{-1}(c_n)$, so ist $\bar{f}$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. (i) Die Definition von $\bar{f}$ ist klar. Zum Nachweis der Stetigkeit sei $(z_n) \subset \bar{D}$ eine Folge mit $\lim z_n = z \in \bar{D}$. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $b_n \in D$ so dass

$$|f(b_n) - \bar{f}(z_n)| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |b_n - z_n| < \frac{1}{n} \quad (11.1)$$

Aus dem zweiten Teil folgt $\lim b_n = \lim z_n = z$, aus der Voraussetzung und Definition von $\bar{f}$ dann $\lim f(b_n) = \bar{f}(z)$ und somit aus dem ersten Teil $\lim \bar{f}(z_n) = \bar{f}(z)$.

§ 11. ERGÄNZUNGEN UND BEISPIEL

(ii) Die weitere Voraussetzung erlaubt die Definition einer stetigen Fortsetzung $\bar{F} : \bar{\mathbb{E}} \rightarrow \bar{D}$. Zu zeigen ist, dass sie die Umkehrabbildung von $\bar{f}$ ist. Sei hierfür $z \in \bar{D}$ und $(b_n) \subset D$ mit $\lim b_n = z$. Dann gilt $\lim f(b_n) = \bar{f}(z) \in \partial \mathbb{E}$ und wegen $F(f(b_n)) = b_n$ für alle n folgt $\bar{F}(\bar{f}(z)) = \lim F(f(b_n)) = \lim b_n = z$. Der Nachweis von $\bar{f} \circ \bar{F} = \text{id}_{\bar{\mathbb{E}}}$ geht genauso. $\square$

Die Schlüsselfrage ist also die Fortsetzung von f in einzelnen Randpunkten. Eine wichtige Rolle spielt dabei das Konzept des *einfachen Randpunktes*:

Definition 11.4. Ein Punkt $b \in \partial D$ heisst *einfach*, wenn jede Folge $(b_n) \subset D$ mit $\lim b_n = b$ sich durch eine stetige Kurve $\gamma : [0, \infty) \rightarrow D$ interpolieren lässt, d.h. es gilt $\gamma(n) = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = b$.

Ein etwas elementareres nützliches Hilfsmittel ist das

Theorem 11.5 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und invariant unter komplexer Konjugation, d.h. $U = U^* = \{\bar{z} \mid z \in U\}$. Bezeichne $U^\pm = \{z \in U \mid \text{Im}(z) \gtrless 0\}$ den Teil von U in der oberen/unteren Halbebene und $I = U \cap \mathbb{R}$ den Schnitt mit der reellen Achse, und ist $f \in \mathcal{O}(U^+)$ mit*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in U^+}} \text{Im}(f(z)) = 0 \quad \forall x \in I \quad (11.2)$$

dann ist die durch $f(z) = \bar{f}(\bar{z})$ für $z \in U^-$ fortgesetzte Funktion auf ganz U holomorph.

Die Aussage wurde in den Übungen mit Hilfe des Satzes von Morera bewiesen unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass auch der Realteil von f sich stetig nach I fortsetzen lässt. Dies ist in der Tatsache aber eine Konsequenz von (11.2). Beweisidee: Man setzt $\text{Im}(f)$ fort als *harmonische Funktion* mit Hilfe einer entsprechenden Integralformel und rekonstruiert anschliessend $\text{Re}(f)$ aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen 2.8. Details stehen z.B. im Ahlfors oder bei Salamon und werden nachgeliefert.

Schwarz–Christoffel-Transformationen

Definition 11.6. Ein Gebiet $P \subset \mathbb{C}$ heisst *polygonal* (oder auch *ein Polygon*), falls paarweise verschiedene Punkte $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ($n \geq 3$) existieren so dass der Polygonzug

$$\mathbf{p} = \gamma_{a_1 a_2} \star \dots \star \gamma_{a_{n-1} a_n} \star \gamma_{a_n a_1} \quad (11.3)$$

einfach geschlossen (d.h. eine Jordankurve) ist, und

$$P = \text{Int}(\mathbf{p}) = \{z \in \mathbb{C} \mid W(\mathbf{p}, z) = 1\} \quad (11.4)$$

Wir identifizieren zyklisch $a_0 = a_1$ und $a_{n+1} = a_n$ und nennen die reellen Zahlen

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \text{Arg} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - a_{k-1}} \in (-1, 1) \quad (11.5)$$

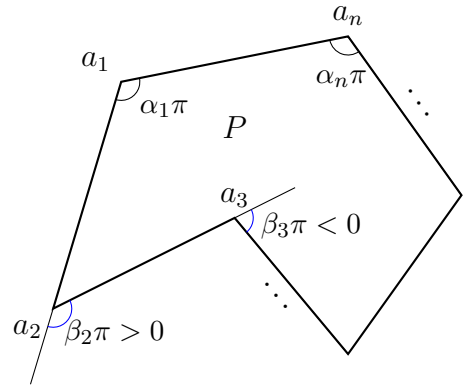
für $k = 1, \dots, n$ die (in Halbdrehungen gemessenen) *Aussenwinkel*, und

$$\alpha_k = 1 - \beta_k \in (0, 2) \quad (11.6)$$

die *Innenwinkel* von P .

In (11.5) ist Arg der Hauptwert des Arguments gemäss Definition 1.5. Der Jordansche Kurvensatz 6.16 (bzw. etwas elementargeometrische Anschauung) zeigt, dass ein polygonales Gebiet einfach zusammenhängend ist. Es ist genau dann konvex, wenn die Innenwinkel alle ≤ 1 sind. Wir können “überflüssige” Ecken ausschliessen, indem wir $\beta_k \neq 0$ für alle k verlangen, in jedem Fall aber ist

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2 \text{ bzw. } \sum_{k=1}^n \beta_k = 2 \quad (11.7)$$



Beweis aus der Winkelsumme im Dreieck durch Induktion nach n bzw. mittels Windungszahl.

Der Riemannsche Abbildungssatz 10.1 zeigt für alle $p \in P$ die Existenz einer biholomorphen Abbildung $f = F^{-1} : P \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f(p) = 0$, die sich gemäss dem Satz von Carathéodory 11.1 zu einem Homöomorphismus $\bar{f} = \bar{F}^{-1} : \bar{P} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}$ fortsetzen lässt. Aus Stetigkeitsgründen sind die Bilder $\eta_k = \bar{f}(a_k)$ der Ecken von P zyklisch auf dem Rand $S^1 = \partial\mathbb{E}$ angeordnet. Mittels Cayley-Transformation (9.1) erhalten wir daraus eine biholomorphe Abbildung $g = \text{Cay}^{-1} \circ f : P \rightarrow \mathbb{H}$ mit $g(p) = i$, Umkehrabbildung $G = F \circ \text{Cay} : \mathbb{H} \rightarrow P$ und Fortsetzung $\bar{G} = \bar{g}^{-1} : \bar{\mathbb{H}} \rightarrow \bar{P}$ auf den Abschluss von $\mathbb{H}$ in der Riemannschen Zahlenkugel (s. Korollar 9.12 und 9.13). Dabei sind die $x_k = \bar{g}(a_k) = \text{Cay}^{-1}(\eta_k)$ eine aufsteigende (endliche) Folge reeller Zahlen. Unser Ziel ist die Herleitung einer geschlossenen Formel für $\bar{G}$.⁹⁴ Wir stützen uns hierfür auf die folgende grundsätzliche Idee zur “Erzeugung und Glättung von Knicken durch reelle Potenzfunktionen”, und auf dabei entwickelte (etwas unpräzise, aber bequeme) Notation.

Beispiel 11.7. (i) In Folge elementarer Betrachtungen (bzw. Beispiel 9.3 (ii)) ist die Exponentialfunktion $\xi \mapsto z = \exp(\xi)$ für alle $0 < \varphi < \pi$ eine biholomorphe Abbildung des Streifen $\{\varphi - \pi < \text{Im}(\xi) < \varphi + \pi\}$ auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus e^{i\varphi}\mathbb{R}_{\leq 0} \supset \mathbb{H}$. Ihre (unter Unterdrückung von φ) als Log_+ geschriebene Umkehrfunktion ist Stammfunktion von $\text{Log}'_+(z) = 1/z$ auf einem $\mathbb{H} \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \bar{\mathbb{H}} \setminus \{0, \infty\}$ umfassenden einfach zusammenhängenden Gebiet mit $\text{Log}_+(-1) = \pi i$. Dies liefert (auf besagtem Gebiet!) in Verallgemeinerung von Theorem 6.9 für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ eine holomorphe Funktion

$$z \mapsto z^\alpha = \exp(\alpha \text{Log}_+(z)) \quad (11.8)$$

mit Ableitung

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1} = \alpha \frac{1}{z^\beta} \quad (11.9)$$

wo $\beta = 1 - \alpha$.

⁹⁴Streng genommen brauchen wir hierfür weder die η_k noch die x_k a priori kennen. Wir könnten sie alternativ auch im Laufe des Beweises rekonstruieren, müssten hierfür aber doch an einer Stelle wenigstens das Schwarzsche Spiegelungsprinzip in der Form 11.5 anrufen.

§ 11. ERGÄNZUNGEN UND BEISPIEL

Diese Funktion stiftet für alle $\alpha \in (0, 2)$ eine biholomorphe Abbildung $\psi_\alpha : \mathbb{H} \rightarrow S_\alpha$ auf den offenen Sektor

$$S_\alpha = \{w = se^{i\chi} \mid s > 0, \chi \in (0, \alpha\pi)\} \quad (11.10)$$

mit stetiger Fortsetzung zunächst auf $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0, \infty\}$ und durch $\overline{\psi}_\alpha(0) = 0$ zu einem Homöomorphismus $\overline{\psi}_\alpha : \overline{\mathbb{H}} \setminus \{\infty\} \rightarrow \overline{S}_\alpha$. In Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ ist

$$\psi_\alpha(z) = r^\alpha e^{i\alpha\varphi}, \quad (11.11)$$

wo $r^\alpha = e^{\alpha \ln r}$ wie in der reellen Analysis, ausserdem gilt $\psi_\alpha^{-1}(w) = w^{1/\alpha}$.

Aus (11.9) folgt die Formel

$$\overline{\psi}_\alpha(z) = \alpha \int_{\gamma_{iz}} \frac{du}{u^\beta} + e^{\alpha\pi i/2}, \quad (11.12)$$

$= \overline{\psi}_\alpha(i)$

zunächst für alle $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0, \infty\}$. Sie behält aber wegen $\beta > -1$ als “uneigentliches Kurventintegral” auch für $z = 0$ Gültigkeit. Dies kann man zweckmässig auch als

$$\overline{\psi}_\alpha(z) = \alpha \int_0^z \frac{du}{u^\beta} \quad (11.13)$$

für alle $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ schreiben, wo wir noch über jeden Weg integrieren können, der bis auf die Endpunkte in der oberen Halbebene verläuft.

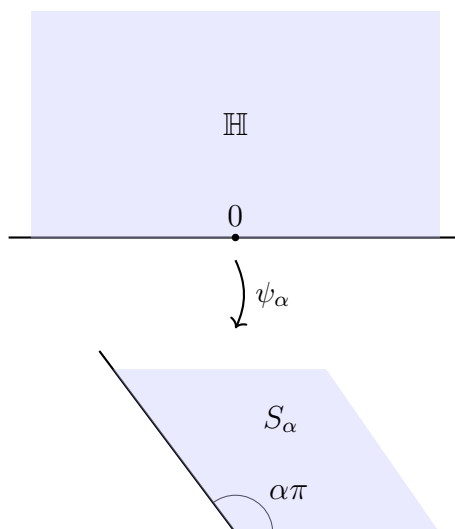
(ii) Durch Translation, Umkehrung, und Drehung folgt aus diesen Überlegungen für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ und jedes offene Intervall I_α der Länge $\alpha \in (0, 2)$ die Existenz einer biholomorphen Abbildung des offenen Sektors mit Scheitelpunkt z_0 ,

$$S(z_0, I_\alpha) = \{z_0 + re^{i\varphi} \mid r > 0, \varphi \in I_\alpha\} \quad (11.14)$$

auf $\mathbb{H}$, mit Fortsetzung zu einem Homöomorphismus $\overline{S}(z_0, I_\alpha) \rightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ mit $z_0 \mapsto 0$, die wir als

$$z \mapsto \zeta(z - z_0)^{1/\alpha} \quad (11.15)$$

für geeignetes ζ mit $|\zeta| = 1$ notieren wollen.



Sind nun für unser Polygon $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ die oben beschriebenen Bilder der a_k unter $\bar{g}$ so definieren wir gemäss dem Beispiel 11.7 (i) für alle k

$$z \mapsto \frac{1}{(z - x_k)^{\beta_k}} \quad (11.16)$$

als holomorphe Funktion auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{x_k + iy \mid y \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ mit positiven Werten für $z = x > x_k$ auf der reellen Achse, ihr *Produkt* entsprechend auf

$$\mathbb{P} := \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^n \{x_k + iy \mid y \leq 0\} \quad (11.17)$$

und behaupten

Theorem 11.8 (Schwarz–Christoffel-Formel). *Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{C}$ so, dass*

$$\bar{G}(z) = p + C \cdot \int_i^z \frac{du}{(u - x_1)^{\beta_1} (u - x_2)^{\beta_2} \dots (u - x_n)^{\beta_n}} \quad (11.18)$$

für alle $z \in \bar{\mathbb{H}}$.

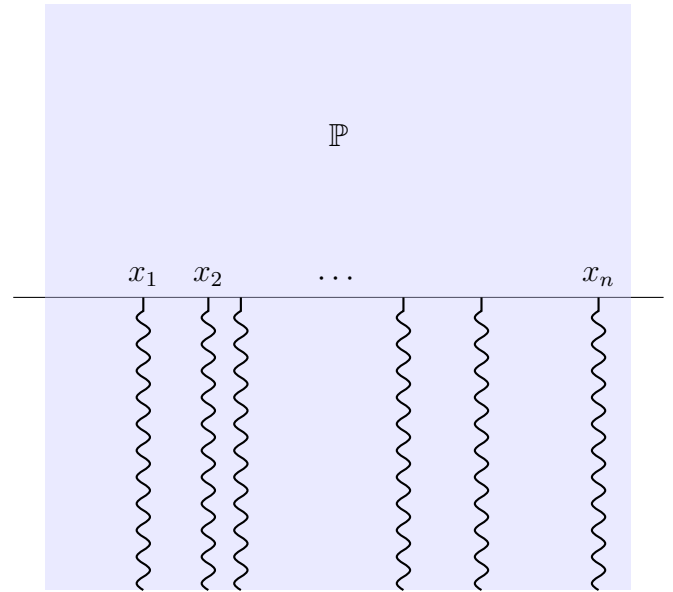
Beweis. Wir bemerken zur Plausibilität zunächst, dass das Integral in (11.18) nichts anderes ist als die Stammfunktion einer gewissen auf $\mathbb{P}$ holomorphen Funktion. Dementsprechend ist es für alle $z \in \mathbb{P}$ definiert und kann über jeden Weg ausgeführt werden, welcher i mit z verbindet und ganz in $\mathbb{P}$ verläuft. Wegen $\beta_k > -1$ folgt wie in (11.13), dass es stetig nach x_k fortgesetzt werden kann für alle $k = 1, \dots, n$. Entlang der reellen Achse hat der Integrand auf jedem Stück (x_{k-1}, x_k) konstantes Argument, “verliert” beim Überqueren von x_k aber den Beitrag von

$$(x - x_k)^{-\beta_k} = \begin{cases} |x - x_k|^{\beta_k} e^{-i\beta_k\pi} & \text{für } x < x_k \\ |x - x_k|^{\beta_k} & \text{für } x > x_k \end{cases} \quad (11.19)$$

Der Wert des Integrals verläuft dementsprechend auf einer geraden Linie bzw. ändert seine Richtung um den Winkel $\beta_k\pi$. Für gegebene x_k , p und C lassen sich die $a_k = \bar{G}(x_k)$ prinzipiell aus dieser Formel rekonstruieren, im Allgemeinen ist aber schwer vorherzusagen, ob der resultierende Polygonzug einfach geschlossen ist. Die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{(u - x_1)^{\beta_1} (u - x_2)^{\beta_2} \dots (u - x_n)^{\beta_n}} \right| \leq c \cdot |u|^{-\sum \beta_k} \quad (11.20)$$

für $|u|$ gross genug, die Summenformel $\sum \beta_k = 2$ aus (11.7) sowie die Integrierbarkeit von $1/|u|^2$ bei ∞ implizieren, dass das Integral für $z \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen Wert a_∞ konvergiert, welcher im Bild auf der Strecke zwischen a_n und a_1 liegt. In



§ 11. ERGÄNZUNGEN UND BEISPIEL

diesem Sinne ist $\overline{G}$ also auf ganz $\overline{\mathbb{H}}$ definiert. Alternativ und etwas präziser zeigt die Substitution $u = 1/v$, dass sich das Integral in (11.18),

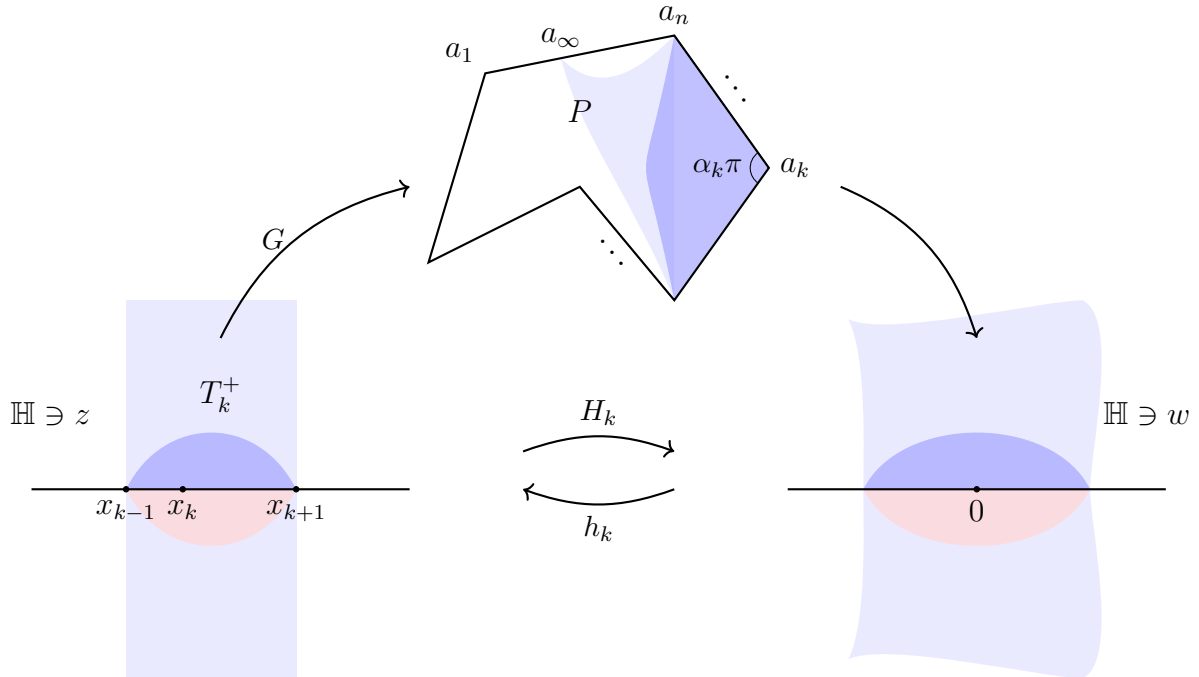
$$-\int_{1/i}^{1/z} \frac{dv}{(1-vx_1)^{\beta_1}(1-vx_2)^{\beta_2}\cdots(1-vx_n)^{\beta_n}} \quad (11.21)$$

auf der Riemannschen Zahlenkugel zu einer in einer Umgebung von ∞ holomorphen Funktion fortsetzen lässt (siehe für diese Logik auch das Beispiel (8.6)).

Nun beginnt der eigentliche Beweis.⁹⁵ Dem Beispiel 11.7 (ii) folgend existiert für jedes k eine biholomorphe Abbildung des durch (a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) erzeugten Sektors mit Innenwinkel α_k auf die obere Halbene, die den Scheitelpunkt a_k auf 0 abbildet und sich zu einem Homöomorphismus auf den Rand fortsetzen lässt. Durch Verkettung mit $G : \mathbb{H} \rightarrow P$ auf einer offenen Umgebung des Winkelstücks $\gamma_{a_{k-1}a_k} \star \gamma_{a_k a_{k+1}}$ (welches selbst P nicht schneidet!) ergibt dies eine biholomorphe Abbildung zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{H}$, die wir gemäss (11.15) als

$$H_k(z) = (G(z) - a_k)^{1/\alpha_k}, \quad h_k(w) = H_k^{-1}(w) = g(w^{\alpha_k} + a_k) \quad (11.22)$$

schreiben wollen, und die die Eigenschaft besitzt, dass $\text{Im}(h_k(w)) \rightarrow 0$ für $\text{Im}(w) \rightarrow 0$.⁹⁶ Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip (Theorem 11.5) erlaubt daher die Fortsetzung von h_k auf eine volle Umgebung eines reellen Intervalls in der w -Ebene, die in Folge des Satzes von Rouché 8.2 dort auch überall injektiv sein muss, und damit wieder eine biholomorphe Abbildung auf eine Umgebung des Intervalls (x_{k-1}, x_{k+1}) in der z -Ebene definiert.⁹⁷



Die erste Gleichung von (11.22) erlaubt dann die Fortsetzung von H_k auf jede einfach zusammenhängende Teilmenge in der oberen Halbebene, insbesondere den

⁹⁵Wie gesagt, hierfür brauchen wir die x_k 's zunächst nicht.

⁹⁶Dies folgt aus Lemma 11.2 durch Anwenden der Cayley-Transformation (9.1).

⁹⁷Anders gesagt *definiert* an dieser Stelle h_k den Punkt $x_k := h_k(0)$. Mit geeigneter Interpretation gelten diese Aussagen auch für $k = 1, n$.

Halbstreifen $T_k^+ := (x_{k-1}, x_{k+1}) + i\mathbb{R}_{>0}$, das Schwarzsche Spiegelungsprinzip wiederum auf den gesamten Streifen $T_k = \{z \mid x_{k-1} < \operatorname{Re}(z) < x_{k+1}\}$. Da $G'(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$, und H_k auf der reellen Achse lokal injektiv ist, ist H'_k auf ganz T_k nullstellenfrei, die einzige Nullstelle von H_k liegt bei $z = x_k$. Auf T_k^+ gilt

$$G = H_k^{\alpha_k} + a_k, \quad G' = \alpha_k H'_k H_k^{-\beta_k}, \quad \frac{G''}{G'} = \frac{H''_k}{H'_k} - \beta_k \frac{H'_k}{H_k} \quad (11.23)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist auf ganz T_k holomorph, der zweite meromorph mit einzigem Pol bei $z = x_k$ und Residuum $-\beta_k$. Es folgt: Die Funktion

$$\frac{G''(z)}{G'(z)} + \frac{\beta_k}{z - x_k} \quad (11.24)$$

besitzt eine auf ganz T_k holomorphe Fortsetzung, die Kombination

$$\frac{G''(z)}{G'(z)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{z - x_k} \quad (11.25)$$

auf die Vereinigung aller (paarweise überlappender) Streifen, das ist die gesamte komplexe Ebene. Da G sich mit Hilfe von H_1 (oder H_n) zu einer in ∞ holomorphen Funktion fortsetzen lässt (siehe Def. 9.6), besitzt G dort eine konvergente Reihenentwicklung der Form

$$G(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \quad (11.26)$$

Ist c_m der erste nicht-verschwindende⁹⁸ Koeffizient mit $m > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{G''(z)}{G'(z)} &= \frac{\frac{m(m+1)c_m}{z^{m+2}} + \frac{(m+1)(m+2)c_{m+1}}{z^{m+3}} + \dots}{-\frac{mc_m}{z^{m+1}} - \frac{(m+1)c_{m+1}}{z^{m+2}} + \dots} \\ &= -\frac{1}{z} \left(m+1 + \frac{(m+1)^2}{m} \frac{c_{m+1}}{c_m} \frac{1}{z} + \dots \right) \rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (11.27)$$

und daher muss (11.25) nach dem Satz von Liouville 4.13 auf ganz $\mathbb{C}$ (und damit insbesondere auf $\mathbb{H}$) identisch verschwinden. Es folgt durch Integration, dass für alle $z \in \mathbb{P}$ (s. Gl. (11.17))

$$G'(z) = C \cdot \prod_{k=1}^n (z - x_k)^{-\beta_k} \quad (11.28)$$

für eine geeignete Konstante $C \in \mathbb{C}$, genau was zum Nachweis von (11.18) zu zeigen war. $\square$

Durch die Substitution $u = \operatorname{Cay}^{-1}(v) = \frac{v+1}{iv-i}$ mit $\frac{du}{dv} = \frac{-2i}{(iv-i)^2}$ in (11.18) erhalten wir aus Theorem 11.8 wieder mit Hilfe von $\sum \beta_k = 2$:

Korollar 11.9. Für eine geeignete Konstante $\tilde{C}$ ⁹⁹ gilt für alle $w \in \overline{\mathbb{E}}$:

$$F(w) = p + \tilde{C} \cdot \int_0^w \frac{dv}{(v - \eta_1)^{\beta_1} (v - \eta_2)^{\beta_2} \dots (v - \eta_n)^{\beta_n}} \quad (11.29)$$

wo $\eta_k = \operatorname{Cay}(x_k) = \frac{x_k - i}{x_k + i}$.

⁹⁸Wegen der lokalen Injektivität ist tatsächlich $c_1 \neq 0$, ausserdem gilt natürlich $c_0 = a_\infty$.

⁹⁹Nach meinen Berechnungen, $\tilde{C} = -2iC \cdot \prod (1 - ix_k)^{-\beta_k}$

KAPITEL 4

GANZE FUNKTIONEN

Nach der Freilegung der Grundlagen (Cauchy-Formeln 4.7), der Untersuchung lokaler Singularitäten (einschliesslich Residuensatz 7.11), und der Klassifikation einfach zusammenhängender Definitionsbereiche (Riemmanscher Abbildungssatz 10.1) wenden wir uns nun wieder der Beschreibung möglichen globalen Verhaltens ganz meromorpher Funktionen zu. Unsere bisherigen Erkenntnisse hierzu umfassen den Satz von Liouville 4.13 sowie als Konsequenz daraus, dass meromorphe Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel genau die rationalen Funktionen auf $\mathbb{C}$ sind, siehe Lemma 9.7 (iii) und die entsprechende Übungsaufgabe, während alle anderen im Unendlichen eine wesentliche Singularität besitzen müssen. Zur Konstruktion solcher “transzendenter” Funktionen ist es sinnvoll, neben den Potenz- 2.11 und Laurent-Reihen 7.5 noch weitere Quellen zu erschliessen, die sich dann auch für den weiteren Aufbau der Theorie als unerlässlich erweisen, inklusive der irgendwann wieder anstehenden erneuten Erweiterung der Definitionsbereiche. Besonders faszinierend ist hieran die Komplementarität der verschiedenen Konstruktionen.

§ 12 Der Satz von Mittag-Leffler

Wir beginnen mit einer klassischen Existenz- und Eindeutigkeitsfrage.

Theorem 12.1 (Satz von Mittag-Leffler). *Es seien gegeben*

(α) *Eine Teilmenge $A = \{z_1, z_2, \dots\} \subset \mathbb{C}$ ohne Häufungspunkte in $\mathbb{C}$. Wir nennen A auch “diskret” und können annehmen, dass in der Beschreibung $z_i \neq z_j$ falls $i \neq j$ sowie ohne Einschränkung $|z_i| \leq |z_j|$ falls $i < j$.*

(β) *Eine Folge $(P_i)_{i=1,2,\dots} \subset w\mathbb{C}[w]$ von Polynomen ohne konstanten Term und vom Grad $m_i := \deg(P_i) \in \mathbb{N}$. Mit komplexen Zahlen $a_n^{(i)}$, $n = 1, \dots, m_i$, $a_{m_i}^{(i)} \neq 0$, gilt also $P(z) = a_{m_i}^{(i)}w^{m_i} + \dots + a_1^{(i)}w$ für alle i .¹⁰⁰*

Dann existiert eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit Polstellenmenge $P_f = A$ und Hauptteil

$$H_i(z) = P_i\left(\frac{1}{z - z_i}\right) = \frac{a_{m_i}^{(i)}}{(z - z_i)^{m_i}} + \dots + \frac{a_1^{(i)}}{z - z_i} \quad (12.1)$$

für alle i .

¹⁰⁰Die Daten m_i , $a_n^{(i)}$ ebenso wie die Abzählung der z_i werden im Beweis nicht benötigt, und tauchen hier nur aus darstellungs-pädagogischen Gründen auf.

Die Lösung f des obigen Problems ist offenbar eindeutig bis auf die *Addition* einer ganzen Funktion. Zum Existenznachweis modifiziert man die H_i durch *konvergenz-erzeugende Summanden* so dass die daraus gebildete Reihe zu einer meromorphen Funktion konvergiert.

Beweis. Ist für jedes $N = 0, 1, 2, \dots$

$$A_N := \{z_i \in A \mid N \leq |z_i| < N + 1\}, \quad (12.2)$$

so gilt offenbar $A = \bigcup_{N=0}^{\infty} A_N$, ausserdem ist jede A_N endlich, da A keine Häufungspunkte hat. Dann liegen für jedes $N = 1, 2, \dots$ die Polstellen der meromorphen Funktion

$$G_N := \sum_{i|z_i \in A_N} H_i \quad (12.3)$$

ausserhalb von $B_N(0)$, sie lässt sich also dort in eine Potenzreihe entwickeln, die auf jeder kleineren Kreisscheibe gleichmässig absolut konvergiert. Es existieren daher für alle $N > 1$ Polynome Q_N (nämlich, die entsprechend trunkierten Potenzreihen) so dass

$$|G_N(z) - Q_N(z)| \leq \frac{1}{2^N} \quad (12.4)$$

für alle $z \in B_{N-1}(0)$.

Beh.: Die Formel

$$f(z) = G_0(z) + G_1(z) + \sum_{N=2}^{\infty} (G_N(z) - Q_N(z)) \quad (12.5)$$

definiert eine meromorphe Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.

Bew.: Für fixiertes $K > 1$ gilt $B_{K-1}(0) \subset B_{N-1}(0)$ für alle $N \geq K$. Auf $B_{K-1}(0)$ konvergiert deshalb aufgrund von (12.4) die Reihe

$$\sum_{N=K}^{\infty} (G_N(z) - Q_N(z)) \quad (12.6)$$

gleichmässig absolut und daher wegen des Satzes von Weierstrass 5.5 gegen eine holomorphe Funktion. Die Aufspaltung

$$f(z) = G_0(z) + G_1(z) + \sum_{N=2}^{K-1} (G_N(z) - Q_N(z)) + \sum_{N=K}^{\infty} (G_N(z) - Q_N(z)) \quad (12.7)$$

zeigt damit, dass f auf $B_{K-1}(0)$ meromorph ist, und in jedem $z_i \in B_{K-1}(0)$ den in der Aufgabenstellung vorgeschriebenen Hauptteil (12.1) hat. Da dies für alle K gilt, folgt daraus die Behauptung. $\square$

Beispiel 12.2 (Partialbruchzerlegung des Kotangens). Die auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion

$$f(z) = \pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \quad (12.8)$$

§ 12. DER SATZ VON MITTAG-LEFFLER

hat aufgrund der fundamentalen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen Pole erster Ordnung für alle $z = n \in \mathbb{Z}$, mit Residuum

$$\operatorname{Res}_n(f) = \lim_{n \rightarrow z} (\pi(z - n) \cot \pi z) = \pi \frac{\lim_{n \rightarrow z} \cos \pi z}{\partial_z|_{z=n} \sin \pi z} = 1 \quad (12.9)$$

Die aus den zugehörigen Hauptteilen $H_n(z) = \frac{1}{z-n}$ gebildete Reihe konvergiert ebenso wenig wie die harmonische Reihe für kein $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Die nach Abzug des ersten Terms in der Taylor-Entwicklung von H_n ($n \neq 0$) um $z = 0$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| &= \left| \frac{z}{(z-n)n} \right| \leq \frac{|z|}{n(n-|z|)} \\ &\leq 2 \frac{|z|}{n^2} \quad \text{falls } n \geq 2|z| \end{aligned} \quad (12.10)$$

zeigt, dass die Reihe

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \quad (12.11)$$

ausserhalb der Pole lokal gleichmässig absolut konvergiert und daher nach Korollar 5.6 ebenfalls eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion definiert, mit den gleichen Hauptteilen wie der Kotangens. f und g unterscheiden sich also um eine ganze Funktion. Um zu zeigen, dass sie identisch sind, können wir (wieder mit Berufung auf die normale Konvergenz) die Reihe (12.11) gliedweise ableiten und finden

$$g'(z) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad (12.12)$$

sowie andererseits

$$f'(z) = - \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} \quad (12.13)$$

Wegen $f' = g'$ (siehe Übungsaufgabe H9.3) folgt dass $f(z) - g(z) = c \in \mathbb{C}$. Die Konstante muss aber $c = 0$ sein, da bekanntlich $f(-z) = -f(z)$ und (12.11)

$$g(-z) = -\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{-z-n} + \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{-z+n} - \frac{1}{n} \right) = -g(z) \quad (12.14)$$

ebenfalls ungerade ist.

Für einen alternativen Beweis von $f' = g'$ bemerken wir zunächst, dass die beiden (per Konstruktion) die gleichen Polstellen und Hauptteile haben. Die Differenz $F = f' - g'$ ist also holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, ausserdem gilt offenbar $F(z+1) = F(z)$ für alle z . In dem kompakten Rechteck $\{z \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, |\operatorname{Im}(z)| \leq 1\}$ ist F daher beschränkt. Für $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $y = |\operatorname{Im}(z)| > 1$ hingegen implizieren die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(\sin \pi z)^2} \right| &\leq \left(\frac{2}{|e^{\pi \operatorname{Im} z} - e^{-\pi \operatorname{Im} z}|} \right)^2 \rightarrow 0 \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n-z|^2} &\leq \frac{1}{y^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|y^2 + (|n|-1)^2} \leq \frac{3}{y^2} + 2 \int_2^\infty \frac{dt}{y^2 + (t-2)^2} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (12.15)$$

für $y \rightarrow \infty$, dass F auf dem gesamten Streifen und wegen der Periodizität damit überhaupt beschränkt ist und nach dem Satz von Liouville 4.13 darüber hinaus identisch verschwindet.

§ 13 Die Gamma-Funktion

Als nächstes präsentieren wir die nach den Exponential- und trigonometrischen Funktionen wohl wichtigste transzendente ganze Funktion.

Lemma 13.1. (i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ existiert das uneigentliche Integral

$$I(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\epsilon^1 t^{z-1} e^{-t} dt \quad (13.1)$$

und definiert dort eine holomorphe Funktion.

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert

$$J(z) = \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R t^{z-1} e^{-t} dt \quad (13.2)$$

und definiert dort eine holomorphe Funktion.

Beweis. (i) Es genügt, die Behauptung in dem Halbraum $\operatorname{Re}(z) > \delta$ zu zeigen für jedes $\delta > 0$. Aus der Definition $t^{z-1} = e^{(z-1) \ln t}$ des Integranden folgt zunächst die Abschätzung

$$\left| \int_\epsilon^1 t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_\epsilon^1 |t^{z-1} e^{-t}| dt = \int_\epsilon^1 t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t} dt \leq \int_\epsilon^1 t^{\delta-1} dt \leq \frac{1}{\delta} \quad (13.3)$$

und daraus dann die gleichmässige Konvergenz des Integrals nach dem Prinzip der majorisierten Konvergenz. Ausserdem impliziert dies, dass die wegen Korollar 5.7 (über Integrale mit holomorphem Parameter) holomorphe Folge holomorpher Funktionen

$$I_n(z) = \int_{1/n}^1 t^{z-1} e^{-t} dt \quad (13.4)$$

im Halbraum gleichmässig konvergiert und die Grenzfunktion $I(z)$ daher wieder wegen Theorem 5.5 ebenfalls holomorph ist.

(ii) Hier folgt die gleichmässige Konvergenz im Halbraum $\operatorname{Re}(z) < M$ für alle $M > 0$ aus der Abschätzung

$$\left| \int_1^R t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_1^R t^{M-1} e^{-t} dt \leq C \cdot \int_1^R e^{-t/2} dt \leq \frac{2C}{e} \quad (13.5)$$

für eine geeignete Konstante $C > 0$, und damit die Holomorphie von J wie oben aus der Holomorphie der im Halbraum gleichmässig konvergenten Folge

$$J_n(z) = \int_1^n t^{z-1} e^{-t} dt \quad (13.6)$$

□

Definition 13.2. Die im Halbraum $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ durch das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = I(z) + J(z) \quad (13.7)$$

definierte holomorphe Funktion heisst *Gamma-Funktion*. Alternativ: *Eulersches Integral zweiter Gattung*

§ 13. DIE GAMMA-FUNKTION

Lemma 13.3. Die Gamma-Funktion erfreut sich der folgenden Eigenschaften:

- (i) $\Gamma(1) = 1$ (Normierung)
- (ii) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für alle z im Definitionsbereich (sog. Funktionalgleichung)
- (iii) Für alle $0 < a < b$ existiert ein $M > 0$ so, dass $|\Gamma(z)| \leq M$ für alle z mit $a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b$ (Beschränktheit in Vertikalstreifen).

Beweis. (i) und (ii) kann man einfach nachrechnen. Für (iii) genügt der Hinweis, dass wegen $|t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re}(z)-1} \geq 0$ für alle $t \in [0, 1]$,

$$|\Gamma(z)| \leq \Gamma(\operatorname{Re}(z)) \quad (13.8)$$

und dass Γ als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ beschränkt ist. $\square$

Korollar 13.4. (i) $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(ii) Für alle z mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (13.9)$$

Beweis. Vollständige Induktion. $\square$

Proposition 13.5. Die Gamma-Funktion aus Definition 13.2 besitzt eine (eindeutige) Fortsetzung zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen. Diese (wird mit dem gleichen Symbol bezeichnet und) hat einen einfachen Pol in jeder nicht-positiven ganzen Zahl $-n = 0, -1, -2, \dots$, mit Residuum

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)} \quad (13.10)$$

Beweis. Die rechte Seite von (13.9) hat durch (13.7) Sinn falls $\operatorname{Re}(z) > -n-1$ und $z \notin \{0, -1, \dots, -n\}$ und definiert dort eine meromorphe Funktion mit den angegebenen Polstellen. Das Residuum in $z = -n$ ist gemäss Lemma 7.10

$$\lim_{z \rightarrow -n} \frac{(z+n)\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)(z+n)} = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1) \cdots (-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (13.11)$$

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Identitätssatz 5.1, der auch wie die Funktionalgleichung sicherstellt, dass die Fortsetzungen alle miteinander kompatibel sind.¹⁰¹ $\square$

Alternativer Beweis: Die Reihentwicklung des Integranden in (13.1),

$$t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{z-1+n}}{n!} \quad (13.12)$$

konvergiert gleichmässig für alle $t \in [0, 1]$, und alle z mit $\operatorname{Re}(z) > 0$. Die Summanden sind für alle solche z über $[0, 1]$ integrierbar mit

$$\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{n!} dt = \frac{1}{z+n} \cdot \frac{(-1)^n}{n!} \quad (13.13)$$

¹⁰¹dass nämlich $\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{\Gamma(z+n+2)}{z(z+1) \cdots (z+n+1)}$.

Die aus diesen für alle $z \neq -n$ holomorphen Funktionen gebildete Reihe konvergiert lokal gleichmäßig auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ und definiert daher eine meromorphe Funktion mit den angegebenen Polstellen und Hauptteilen. (Vgl. Satz 12.1 von Mittag-Leffler.) Es gilt also für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (13.14)$$

daja J auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Vorsicht: Das Integral (13.1) konvergiert immer noch für kein z mit $\operatorname{Re}(z) \leq 0$. Die Gültigkeit der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ folgt jedoch für alle z leicht aus (13.14) (Übungsaufgabe).

Proposition 13.6. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\{z \mid 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\} \subset D$, und $f \in \mathcal{O}(D)$ mit den drei Eigenschaften*

$$(\alpha) \quad f(1) = 1$$

$$(\beta) \quad f(z+1) = zf(z) \text{ falls } z, z+1 \in D.$$

$$(\gamma) \quad \text{Es existiert ein } M \text{ so dass } |f(z)| \leq M \text{ falls } 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2$$

Dann gilt $f(z) = \Gamma(z)$ für alle $z \in D$.

Beweis. Die Bedingung (β) erlaubt¹⁰² wie in Proposition 13.5 die eindeutige Fortsetzung von f zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ mit der gleichen Funktionalgleichung und den gleichen Polstellen und Hauptteilen wie Γ . Die Differenz

$$\Delta(z) = f(z) - \Gamma(z) \quad (13.15)$$

definiert daher eine ganze (holomorphe) Funktion, immer noch mit $z\Delta(z) = \Delta(z+1)$.
 · Im kompakten Rechteck $\{0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, |\operatorname{Im}(z)| \leq 1\}$ ist Δ als stetige Funktion beschränkt. Für $0 \leq \operatorname{Re}(z) < 1, |\operatorname{Im}(z)| > 1$ gilt wegen der Funktionalgleichung $|\Delta(z)| \leq |\Delta(z+1)|$. Wegen der Beschränktheit von f und Γ in $1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2$ ist Δ damit im gesamten Streifen $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ beschränkt.

· Die Kombination

$$h(z) = \Delta(z)\Delta(1-z) \quad (13.16)$$

ist wegen der Funktionalgleichung

$$h(z+1) = \Delta(z+1)\Delta(-z) = z\Delta(z+1)\Delta(-z) = -\Delta(z)\Delta(1-z) = -h(z) \quad (13.17)$$

bis auf ein Vorzeichen periodisch mit Periode 1. Wegen $\operatorname{Re}(1-z) = 1 - \operatorname{Re}(z)$ folgt aus der Beschränktheit von Δ die von h im Streifen $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ und damit auf ganz $\mathbb{C}$. Zusammen mit $h(1) = \Delta(1)\Delta(0) = 0$ impliziert der Satz von Liouville 4.13, dass $h \equiv 0$. Da $\mathcal{O}(D)$ nullteilerfrei ist (Übungsaufgabe mit Identitätssatz) folgt $\Delta \equiv 0$ und daraus die Behauptung. $\square$

Korollar 13.4 (i) besagt, dass die Gamma-Funktion die Fakultätsfunktion interpoliert, (13.10) stellt eine Beziehung zwischen additiver Inversion des Arguments und multiplikativer Inversion des Funktionswertes her. Dass sich auch diese Beziehung interpolieren lässt, führt auf die wohl bemerkenswerteste Eigenschaft der Gamma-Funktion.

¹⁰²Wegen der Offenheit von D gibt es für jedes z mindestens ein n so, dass $z+n, z+n+1 \in D$.

§ 13. DIE GAMMA-FUNKTION

Theorem 13.7 (Eulersche Ergänzungsformel). *Es gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (13.18)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Beweis. Die Polstellen von $\Gamma(1-z)$ liegen bei $1-z = -n \in \{0, -1, \dots\}$, d.h. $z = m = n+1 \in \mathbb{N}$, aus der Laurent-Entwicklung

$$\Gamma(1-z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{1-z+n} + \dots \quad (13.19)$$

folgt

$$\text{Res}_{z=m} \Gamma(1-z) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \quad (13.20)$$

Die linke Seite von (13.18) hat also Pole genau in allen ganzen Zahlen und es gilt

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=n} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \begin{cases} (\text{Res}_{z=n} \Gamma(z))\Gamma(1-n) = \frac{(-1)^n}{(-n)!}(-n)! & \text{falls } n \leq 0 \\ \Gamma(n)(\text{Res}_{z=n} \Gamma(1-z)) = (n-1)!\frac{(-1)^n}{(n-1)!} & \text{falls } n > 0 \end{cases} \\ &= (-1)^n \end{aligned} \quad (13.21)$$

für alle n . Ausserdem ist sie wie in (13.17) bis auf ein Vorzeichen periodisch mit Periode 1. Die rechte Seite hat genau die gleichen Eigenschaften (vgl. (12.9)), die Differenz

$$g(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (13.22)$$

definiert also eine ganze Funktion mit $g(z+1) = g(z)$ für alle z . Sie ist beschränkt auf $\{0 \leq \text{Re}(z) \leq 1, |\text{Im}(z)| \leq 1\}$, während für $0 \leq \text{Re}(z) \leq 1, |\text{Im}(z)| > 1$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sin \pi z} \right| &\leq \frac{1}{e^{\pi|\text{Im}(z)|} - e^{-\pi|\text{Im}(z)|}} \\ |\Gamma(z)\Gamma(1-z)| &= \frac{1}{|z(1-z)|} |\Gamma(z+1)\Gamma(2-z)| \leq \frac{M^2}{|\text{Im}(z)|^2} \end{aligned} \quad (13.23)$$

da $z+1, 2-z \in \{1 \leq \text{Re}(z) \leq 2\}$ und Γ dort (durch M) beschränkt ist. Dies zeigt wieder mit Liouville 4.13, dass g identisch verschwindet, und damit die Behauptung. $\square$

Korollar 13.8. (i) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(ii) $\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z)$

Beweis. (i) folgt aus $\Gamma(1/2)\Gamma(1-1/2) = \pi$.

(ii) Die Funktion

$$f(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) \quad (13.24)$$

erfüllt die drei charakteristischen Eigenschaften aus Proposition 13.6 und muss daher gleich $\Gamma(z)$ sein. $\square$

Produktentwicklung

Zu guter Letzt illustrieren wir die Konstruktion holomorpher Funktionen durch *unendliche Produkte*.

Lemma 13.9. *Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen, derart dass $\sum a_n$ absolut konvergiert. Dann existiert ein $N > 0$ derart, dass die Reihe*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n) \quad (13.25)$$

absolut konvergiert, wobei Log den Hauptzweig des komplexen Logarithmus aus Beispiel 2.24 bezeichnet, und die Wohldefiniertheit sogleich mit gezeigt wird. In diesem Fall existiert

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k (1 + a_n), \quad (13.26)$$

es gilt

$$(\alpha) \quad P = \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \cdot \exp\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n)\right)$$

$$(\beta) \quad P = 0 \Leftrightarrow \exists n : 1 + a_n = 0$$

und das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad (13.27)$$

heisst absolut konvergent.

Beweis. Wegen der absoluten Konvergenz ist $|a_n| < \frac{1}{2}$ für n gross genug. Dann gilt (2.30)

$$\operatorname{Log}(1 + a_n) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{(a_n)^r}{r} \quad (13.28)$$

so dass eine Konstante C existiert derart dass für alle solche n

$$|\operatorname{Log}(1 + a_n)| \leq C \cdot |a_n| \quad (13.29)$$

(siehe Aufgabe P3.2). Hieraus folgt unmittelbar (13.25), die Aussage (α) und damit die Existenz von P aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion, und (β) aus ihrem Nichtverschwinden. $\square$

Proposition 13.10. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $(f_n) \subset \mathcal{O}(D)$ derart dass (α) die Reihe $\sum (f_n - 1)$ normal konvergiert und (β) f_n für kein n identisch verschwindet. Dann gilt*

(i) Das unendliche Produkt $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ist (punktweise absolut konvergent und) holomorph, und heisst normal konvergent.

§ 13. DIE GAMMA-FUNKTION

(ii) f ist nicht identisch gleich null. Die Nullstellenmenge von f ist die Vereinigung¹⁰³ der Nullstellenmengen der f_n und für alle z ausserhalb dieser Nullstellenmenge gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} \quad (13.30)$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite dort normal konvergiert.

Beweis. Folgt mit Lemma 13.9 so wie Korollar 5.6 aus Theorem 5.5. $\square$

Theorem 13.11. Die Gamma-Funktion ist nullstellenfrei und für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (13.31)$$

wobei

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k\right) = 0.57721566 \dots \quad (13.32)$$

die Euler-Mascheroni-Konstante bezeichnet.¹⁰⁴

Beweis. Aus der Exponentialreihe folgt

$$(1+z)e^{-z} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \quad (13.33)$$

Daher existiert für alle $R > 0$ eine Konstante C so, dass für alle n und alle $z \in B_R(0)$

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} - 1 \right| \leq C \frac{|z|^2}{n^2} \leq C \frac{R^2}{n^2} \quad (13.34)$$

Daraus folgt die normale Konvergenz des unendlichen Produkts

$$G(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (13.35)$$

mit $G(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{0, -1, \dots\}$ sowie die lokal gleichmässige Konvergenz der Folge

$$G_k(z) = ze^{z(1+1/2+\cdots+1/k-\log k)} \prod_{n=1}^k \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = \frac{k^{-z}}{k!} z(z+1) \cdots (z+k) \quad (13.36)$$

(mit Grenzfunktion G). Es folgt

$$(\alpha) \quad G(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

$$(\beta) \quad \frac{G(z)}{G(z+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{G_k(z)}{G_k(z+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z \cdot k}{z+k+1} = z \text{ (ausserhalb der Nullstellen).}$$

¹⁰³Interessant: Diese Vereinigung hat keine Häufungspunkte. Warum?

¹⁰⁴Die Existenz dieses Limes ist geschenkt.

(γ) $|G(z)^{-1}| \leq |G(\operatorname{Re}(z))^{-1}|$ wegen

$$\left| \frac{k!k^z}{z(z+1)\cdots(z+k)} \right| \leq \frac{k!k^{\operatorname{Re}(z)}}{\operatorname{Re}(z)(\operatorname{Re}(z)+1)\cdots(\operatorname{Re}(z)+k)} \quad (13.37)$$

und damit die Beschränktheit von $G(z)^{-1}$ im Streifen $1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2$.

Aus Proposition 13.6 folgt damit $G(z)^{-1} = \Gamma(z)$ (in $\mathcal{M}(\mathbb{C})$) und aus der Holomorphie von G auf ganz $\mathbb{C}$ die Nullstellenfreiheit von Γ . $\square$

Aus Theorem 13.7 und Theorem 13.11 folgt zusammengesetzt

Korollar 13.12. $\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

und daraus durch logarithmische Ableitung wieder die Partialbruchzerlegung des Kotangens aus Beispiel 12.2 (Übungsaufgabe).