Prof. Dr. Petra Schwer, Raphael Appenzeller,
Marco Lotz
Wintersemester 2024

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Seminar: CAT(0) kubische Komplexe

Räume mit speziellen Krümmungseigenschaften haben oft besonders schöne Symmetriegruppen und besonders gutes Verhalten, wenn es darum geht in diesen Räumen kürzeste Wege zu berechnen. Eine Möglichkeit nicht-positive Krümmung für metrische Räume zu definieren ist der Begriff der CAT(0) Eigenschaft. Für Räume, die aus mehrdimensionalen Würfeln zusammengesetzt sind, ist diese (zunächst metrische) Eigenschaft besonders schön kombinatorisch beschreibbar.

Anwendung findet die Theorie der CAT(0) kubischen Komplexe zum Beispiel in der Biologie oder Sprachforschung, in der Steuerung von Robotern oder auch in der Wolkenforschung.

Dieses Seminar führt die Theorie der CAT(0) Räume ein und stellt Ihnen ausgewählte Eigenschaften und Anwendungen CAT(0) kubischer Komplexe vor.

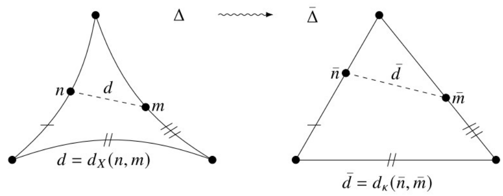

Figure 2.2: The CAT(κ) property for triangles.

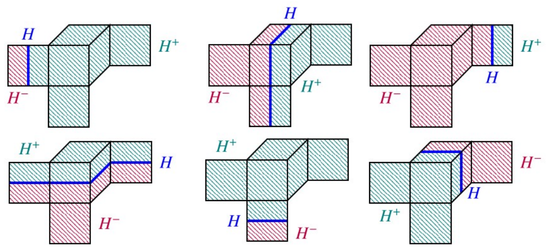

Figure 4.4: Hyperplanes in a cube complex.

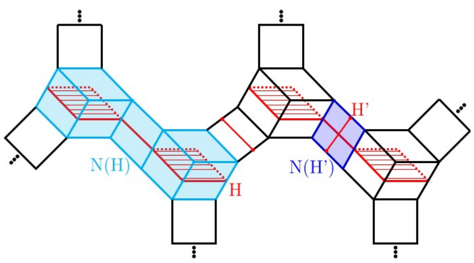

Figure 4.3: PSL_2 may be cubulated.

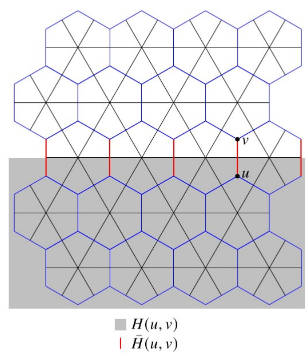

Figure 5.7: The red edges are the wall $\bar{H}(u,v)$ of the grey shaded half space $H(u,v)$.

Gerne können auch fortgeschrittene Bachelor-Studierende am Seminar teilnehmen. Es ist auch möglich eine Abschlussarbeit auf einem (geeigneten) Vortrag aufzubauen.

Bei Fragen sprechen Sie mich gerne einfach an, schreiben eine Mail an `schwer@mathi.uni-heidelberg.de` oder `mlotz@math.uni-heidelberg.de`.

Vortragsthemen

Räume nicht-positiver Krümmung

(1) CAT(0) Räume
Metrische Räume und die CAT(0) Bedingung werden eingeführt und Beispiele diskutiert. Zusätzlich: Beweis des Bruhat-Tits Fixunktsatz (Bachelor-Niveau).
Literatur: [4, Kapitel 3.1].

(2) Gruppen als metrische Räume und Winkel in CAT(0) Räumen
Cayleygraphen und Gruppen als metrische Räume. Definition von Winkeln in metrischen Räumen und Konstruktion und Charakterisierung flacher Kegel (Bachelor-Niveau).
Literatur: [4, Kapitel 2.2, 3.2 und 3.3].

CAT(0) kubische Komplexe

(3) Kubische Komplexe und Gromov's Linkbedingung
Kombinatorische Charakterisierung der CAT(0) Bedingung für Würfelkomplexe.
Literatur: [4, Kapitel 4.1 und 4.2].

(4) Hyperebenen in kubischen Komplexen
Spezielle Unterstrukturen in CAT(0) kubischen Komplexen.
Literatur: [4, Kapitel 5.1].

(5) Konstruktion eines kubischen Komplexes aus einem Halbraumsystem
Einführung in Halbraumsysteme und Konstruktion von kubischen Komplexen aus diesen. Rollerdualität und Ränder von kubischen Komplexen.
Literatur: [4, Kapitel 5.2 und optional 5.3].

Gruppen und CAT(0) kubische Komplexe

(6) Gruppenwirkungen auf CAT(0) kubischen Komplexen und Helly's Theorem
Welche Eigenschaften haben Gruppen mit guten Wirkungen auf CAT(0) kubischen Komplkexen?
Literatur: [4, Kapitel 7.1].

(7) Tits Alternative

Eine starke algebraische Konsequenz für gewissen Gruppenwirkungen auf CAT(0) Kubischen Komplexen. Unter den betrachteten Bedingungen kann eine Gruppe nur in einer von zwei Klassen sein.
Literatur: [4, Kapitel 7.2].

(8) Würfelvervollständigungen und Rechtwinklige Artingruppen

Definition der Klasse der rechtwinkligen Artingruppen. Konstruktion des Salvetti-Komplexes und Einbettung von Gruppen in RAAGs.
Literatur: [4, Kapitel 4.3 und 4.4].

(9) Spezielle kubische Komplexe

Einführung spezieller kubischer Komplexe und ihrer Eigenschaften. Beweis, dass jede spezielle kubulierte Gruppe in eine rechtwinklige Artingruppe eingebettet werden kann. Diskussion eines Theorems von Agol
Literatur: [4, Kapitel 7.3].

Anwendungen

(10) Der Raum phylogenetischer Bäume

Zusammenhänge zwischen verschiedenen Varianten von Vererbungsbäumen (zB von Sprache oder Genetischer Abstammung) kann mittel kubischen Komplexen beschrieben werden.
Literatur: [4, Kapitel 7.4], [3].

(11) Effektive Robotersteuerung

Unter milden Annahmen ist der Zustandsraum eines sich bewegenden Roboters oder Roboterarms ein Würfelkomplex. Die Überführung eines Zustandes in einen anderen kann dann besonders effektiv gestaltet werden.
Literatur: [1] und gegebenenfalls [2].

(12) Kubulierung von Coxetergruppen vs Wolkenforschung

Es wird gezeigt, dass Coxetergruppen immer auf einem CAT(0) kubischen Komplex wirken. Als Spezialfall findet das Anwendung in der Berechnung von Zusammenhangskomponenten von Wolkenstrukturen.
Literatur: [5], [4, Kapitel 6].

Bachelor-Niveau: (1)-(4) und (10)

Master-Niveau: (5) bis (9), (11) und (12)

Literatur

[1] A. Abrams and R. Ghrist. *State complexes for metamorphic robots.* https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/0278364904045468, International Journal of Robotics, 2004.

[2] F. Ardila, M. Owen, S. Sullivant, *Geodesics in CAT(0) cube complexes*, http://math.sfsu.edu/federico/Articles/cat0.pdf

[3] L. Billera, S. Holmes, K. Vogtmann, *Geometry of the Space of Phylogenetic Trees* https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196885801907596, Advances in Applied Mathematics, 2001.

[4] P. Schwer, *CAT(0) Cube Complexes: An Introduction* https://doi.org/10.1007/978-3-031-43622-2, Springer, Lecture Notes in Mathematics, 2023.

[5] A. Voigt, P. Schwer, N. von Rotberg, N. Knopf, *TriCCo v1.0.0 – a cubulation-based method for computing connected components on triangular grids* https://gmd.copernicus.org/preprints/gmd-2021-349/, GMD, 2021.

Zur Vorbereitung:

Bitte beherzigen Sie folgende Hinweise zur Vorbereitung:

- Sie halten den Vortrag in erster Linie für Ihre Kommilitonen (damit diese etwas lernen) und für Sich selbst (um einzuüben, sich selbst mathematisches Material zu erarbeiten). Berücksichtigen Sie dies bei der Materialauswahl und der Vorbereitung des Vortrags. Es ist nicht das Ziel, alle bereitgestelten Unterlagen wörtlich in den Vortrag einzubauen.
- Nehmen Sie sich Zeit für die Bearbeitung des Materials. Öfter und regelmäßig wenige Stunden zu investieren ist besser, als am Ende kurz vor dem Vortrag zwei Wochen durchzuarbeiten.
- Spätestens 2 Wochen vor dem Vortrag möchte ich Ihren Vortragsplan sehen und mit Ihnen durchsprechen.
- Bei Fragen zum Material und dem Aufbau des Vortrags können Sie mich gerne kontaktieren.